



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 19/12/09

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 < 391 \\ y^3 + 3x^2y = 364 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση:

Προσθέτοντας κατά μέλη την ανισότητα και την ισότητα του συστήματος θα πάρουμε
 $x^3 + 3xy^2 + y^3 + 3x^2y = 755 \Leftrightarrow (x+y)^3 < 755$ δηλαδή $(x+y)^3 \leq 729 = 9^3$
ή $x+y \leq 9$ (1)

Αφαιρώντας κατά μέλη την ανισότητα και την ισότητα του συστήματος θα πάρουμε
 $x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2y = 27 \Leftrightarrow (x-y)^3 < 3^3$ δηλαδή $(x-y)^3 \leq 2^3$
ή $x-y \leq 2$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε

$$2x \leq 11 \Rightarrow x \leq \frac{11}{2} \Rightarrow x \leq 5$$

Δηλαδή οι δυνατές τιμές του x είναι $x = 1$ ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 . Επίσης από την (2) έχουμε:
 $x-y = 1$ ή $x-y = 2$.

- Για $x-y = 2$ και $x = 1$ ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 οι τιμές για το y είναι
 $y = 3$ ή 2 ή 1 ή 0 ή -1 , δηλαδή θα έχουμε τα ζευγάρια
 $(x, y) = (5, 3)$ ή $(4, 2)$ ή $(3, 1)$ για $x > y$ με $x, y \in \mathbb{N}$. Από αυτές όμως τις λύσεις
καμιά δεν επαληθεύει την εξίσωση $y^3 + 3x^2y = 364$, άρα δεν είναι δεκτές.
- Για $x-y = 1$ και $x = 1$ ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 οι τιμές για το y είναι
 $y = 4$ ή 3 ή 2 ή 1 ή 0 , δηλαδή θα έχουμε τα ζευγάρια
 $(x, y) = (4, 3)$ ή $(3, 2)$ ή $(2, 1)$ ή $(5, 4)$ για $x > y$ με $x, y \in \mathbb{N}$. Από αυτές όμως τις
λύσεις η μόνη που επαληθεύει την εξίσωση $y^3 + 3x^2y = 364$, είναι η
 $(x, y) = (5, 4)$.

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = n^5 - n$ διαιρείται με το 30, για κάθε ακέραιο n και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η παράσταση $B = \alpha^{10} + \beta^{10} + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^6 + \beta^6)$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί, διαιρείται με το 30^2 .

Προτεινόμενη λύση:

Η παράσταση $A = n^5 - n$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$A = n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

Επειδή οι αριθμοί $n - 1, n, n + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έπεται ότι

$$6 / (n - 1)n(n + 1) \text{ άρα } 6 / n^5 - n$$

- Αν $n = 5k, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n$
- Αν $n \equiv 1 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n - 1$
- Αν $n \equiv 2 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^2 + 1$
- Αν $n \equiv 3 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^2 + 1$
- Αν $n \equiv 4 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n + 1$

Άρα $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^5 - n$ και επειδή $(5, 6) = 1$ άρα $30 / n^5 - n$.

Η παράσταση B γράφεται:

$$B = \alpha^{10} + \beta^{10} + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^6 + \beta^6) = (\alpha^5 - \alpha)^2 + (\beta^5 - \beta)^2$$

και επειδή α, β ακέραιοι αριθμοί από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

$$30^2 / (\alpha^5 - \alpha)^2 \text{ αφού } 30 / \alpha^5 - \alpha \text{ και } 30^2 / (\beta^5 - \beta)^2 \text{ αφού } 30 / \beta^5 - \beta$$

$$\text{Άρα } 30^2 / B.$$

3. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και δυο κάθετες ακτίνες του OG, OD . Φέρουμε GE και DZ κάθετες στην AB (E, Z σημεία της AB) και έστω K, Λ τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των ορθογωνίων τριγώνων OEG, OZD αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι : α) $K\Lambda = R$.

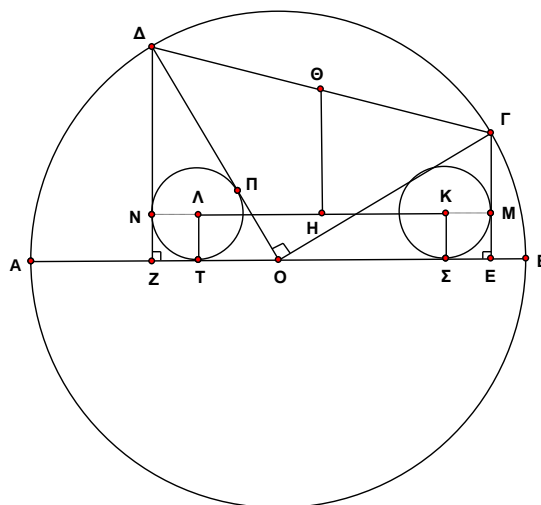
β) $\Theta H = \frac{R}{2}$, όπου Θ, H τα μέσα των $\Gamma\Delta, K\Lambda$ αντίστοιχα.

Προτεινόμενη λύση:

- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα OEG, OZD είναι ίσα, διότι έχουν ίσες τις υποτείνουσες OG, OD και $\angle GOE = \angle ZDO$ (πλευρές κάθετες). $AT \parallel KS$, αφού είναι κάθετες στην AB και είναι ακτίνες ίσων κύκλων. Άρα το $K\Lambda T\Xi$ είναι ορθογώνιο και $K\Lambda = \Sigma T = \Sigma O + OT = \Delta\P + O\P = O\Delta = R$.

- β) Το ΘH είναι διάμεσος του ορθογώνιου τραpezίου $\Gamma M N \Delta$, άρα

$$\Theta H = \frac{\Gamma M + \Delta N}{2} = \frac{O\P + \Delta\P}{2} = \frac{O\Delta}{2} = \frac{R}{2}.$$



4. Χωρίζουμε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 2010 σε 2010×2010 τετραγωνικά κελιά με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του.
 Σε κάθε τετραγωνικό κελί γράφουμε τυχαία ένα από τους αριθμούς $+1, -1$.
 Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i -γραμμής και με B_i το γινόμενο των αριθμών της i -στήλης του πίνακα ($i = 1, 2, 3, \dots, 2010$). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010}$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Προτεινόμενη λύση:

Προφανώς αν πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς των κελιών κάθε γραμμής A_i και κάθε στήλης B_i είναι $+1$ ή -1 .

Υποθέτουμε ότι από τις $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ γραμμές οι α έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \alpha$ γραμμές θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 .

Όμοια υποθέτουμε ότι από τις $B_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ στήλες οι β έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \beta$ στήλες θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 .

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα $A_1 A_2 \dots A_{2010}$ και $B_1 B_2 \dots B_{2010}$ είναι ίσα. Άρα $(-1)^{2010-\alpha} = (-1)^{2010-\beta}$. Για να ισχύει η τελευταία ισότητα πρέπει οι αριθμοί α και β να είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί ταυτόχρονα.

Επομένως έχουμε:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010} = \\ \alpha + (2010 - \alpha)(-1) + \beta + (2010 - \beta)(-1) = 2(\alpha + \beta) - 4020.$$

Αφού $\alpha + \beta$ είναι άρτιος έπεται ότι το 4 διαιρεί το δεύτερο μέρος της τελευταίας σχέσης.