



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

B' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/10

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu^3 B + \eta\mu^3 \Gamma = \eta\mu^2 A \cdot (\eta\mu B + \eta\mu \Gamma)$, να βρείτε τη γωνία A του τριγώνου.

Προτεινόμενη λύση:

Επειδή σε τρίγωνο είναι $\eta\mu B + \eta\mu \Gamma \neq 0$, η δεδομένη σχέση γίνεται

$$\eta\mu^2 B - \eta\mu B \eta\mu \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma = \eta\mu^2 A \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4R^2} - \frac{\beta\gamma}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2} = \frac{\alpha^2}{4R^2}$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 = \alpha^2.$$

Όμως $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2}$ και άρα $A = 60^\circ$.

2. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\alpha_1 = 2010$ και $\Sigma_n = n^2 \cdot \alpha_n$, $\forall n \in N^*$ όπου $\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$.
Να βρείτε τον όρο α_{2010} της ακολουθίας.

Προτεινόμενη λύση:

Για κάθε $n \in N^*$ είναι, $\alpha_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = n^2 \alpha_n - (n-1)^2 \alpha_{n-1}$

Δηλαδή: $(n^2 - 1)\alpha_n = (n-1)^2 \alpha_{n-1}$ ή $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$, $\forall n \in N^* \setminus \{1\}$.

Από την τελευταία διαδοχικά για $n = 2, 3, \dots, 2010$ παίρνουμε

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{3}, \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{2}{4}, \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{3}{5}, \dots, \frac{\alpha_{2008}}{\alpha_{2007}} = \frac{2007}{2009}, \frac{\alpha_{2009}}{\alpha_{2008}} = \frac{2008}{2010}, \frac{\alpha_{2010}}{\alpha_{2009}} = \frac{2009}{2011}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη: $\frac{\alpha_{2010}}{\alpha_1} = \frac{1 \cdot 2}{2010 \cdot 2011} \Leftrightarrow \alpha_{2010} = \frac{2}{2011}$.

3. Αν a, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι διαφορετικοί του μηδενός πρώτοι μεταξύ τους και ισχύει

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$$

να αποδείξετε ότι $(a + \beta)$ είναι τετράγωνος αριθμός.

Προτεινόμενη λύση:

Επειδή a, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι, ισχύει $a > \gamma$ και $\beta > \gamma$.

Άρα υπάρχουν θετικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε $a = \gamma + \kappa$ και $\beta = \gamma + \lambda$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\gamma + \kappa} + \frac{1}{\gamma + \lambda} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma(\gamma + \lambda) + \gamma(\gamma + \kappa) = (\gamma + \kappa)(\gamma + \lambda)$$

$$\Rightarrow \gamma^2 + \gamma\kappa + \gamma^2 + \gamma\lambda = \gamma^2 + \gamma\lambda + \gamma\kappa + \kappa\lambda \Rightarrow \gamma^2 = \kappa\lambda$$

Οι αριθμοί κ και λ δεν μπορούν να είναι κοινοί παράγοντες.

Εάν υπάρχει $\delta > 1$ που διαιρεί τον γ θα διαιρεί επίσης και τους a και β , το οποίο δεν είναι δυνατόν εφόσον δίνεται ότι a, β και γ δεν έχουν κοινό παράγοντα. Άρα οι αριθμοί κ και λ είναι τετράγωνοι αριθμοί, δηλαδή $\kappa = \mu^2$ και $\lambda = \nu^2$.

Άρα $a + \beta = \gamma + \kappa + \gamma + \lambda = \kappa + \lambda + 2\gamma = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu = (\mu + \nu)^2$.

4. Οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα άκρα A, B αντίστοιχα χορδής AB κύκλου (O, R) τέμνονται στο σημείο P ($AB < 2R$). Σε σημείο N της χορδής AB φέρουμε ευθεία κάθετη στο ON , που τέμνει τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία Z, Θ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- (α) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ZP\Theta$ περνά από το O
- (β) Αν η ευθεία που περνά από το μέσον K του OZ και το μέσον E του $P\Theta$, τέμνει την ZP στο T και την $O\Theta$ στο Σ , τότε ισχύει $\frac{\Sigma\Theta}{TP} = \frac{ON}{NB}$.

Προτεινόμενη λύση:

(α) Επειδή $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ το τετράπλευρο $OAPB$ είναι εγγράψιμο και άρα θα έχουμε:
 $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$ ή
 $\angle APB + (\angle AOZ + \angle ZOB) = 180^\circ$ (1).
 Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ONZA$ και $ONB\Theta$ παίρνουμε
 $\angle ZON = \angle \Theta NB =$
 $= \angle ANZ = \angle AOZ$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε
 $\angle APB + (\angle ZON + \angle ZOB) = 180^\circ$ ή
 $\angle APB + \angle ZOP = 180^\circ$, δηλαδή το τετράπλευρο $ZOPB$ είναι εγγράψιμο.
 (β) Φέρουμε $\theta\pi // PY // OZ$. Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle TZK \approx \triangle TPY$ παίρνουμε

$$\frac{TZ}{TP} = \frac{ZK}{PY}$$

και από τα όμοια τρίγωνα $\triangle ΣΟΚ \approx \triangle Σ\theta\pi$ παίρνουμε

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} = \frac{OK}{\theta\pi}$$

Όμως από τα ίσα τρίγωνα $\triangle Ε\theta\pi = \triangle ΕPY$, παίρνουμε $PY = \theta\pi$. Άρα από τις προηγούμενες ισότητες θα έχουμε:

$$\frac{TZ}{TP} = \frac{ZK}{PY} = \frac{OK}{\theta\pi} = \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} \Rightarrow \frac{TZ}{TP} = \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} \quad (3)$$

Όμως έχουμε:

$$\Sigma O = \Sigma \theta - O\theta \Rightarrow \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} = 1 - \frac{O\theta}{\Sigma \theta} \text{ και } TZ = TP - ZP \Rightarrow \frac{TZ}{TP} = 1 - \frac{ZP}{TP}$$

Επομένως η (3) γράφεται:

$$\frac{O\theta}{\Sigma \theta} = \frac{ZP}{TP}$$

Επειδή όμως το τρίγωνο $\triangle OZ\theta$ είναι ισοσκελές και $O\theta = OZ$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\frac{OZ}{\Sigma \theta} = \frac{ZP}{TP} \Rightarrow \frac{OZ}{ZP} = \frac{\Sigma \theta}{TP}$$

Από τα όμοια τρίγωνα

$$\triangle OZP \approx \triangle ONB \Rightarrow \frac{OZ}{ZP} = \frac{ON}{NB}$$

Άρα τελικά θα πάρουμε

$$\frac{\Sigma \theta}{TP} = \frac{ON}{NB}$$

