



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/11/2010

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

Προτεινόμενες λύσεις

1. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + \lambda + 5 = 0$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$(\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 \rho_2^2$$

Λύση

(α) $\lambda - 1 \neq 0$ και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $4(\lambda + 1)^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda + 5) > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda < 3$.

(β) $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{2(\lambda+1)}{\lambda-1}$ και $\rho_1 \rho_2 = \frac{\lambda+5}{\lambda-1}$.

Έχουμε, $(\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 \rho_2^2 \Leftrightarrow \frac{4(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda+5)^2}{(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow 2(\lambda + 1) = \pm(\lambda + 5) \Leftrightarrow \lambda = 3$
(απορρίπτεται) ή $\lambda = -\frac{7}{3}$ (δεκτή).

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 5$ και $g(x) = \sqrt{2 - |x - 4|}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $\varphi = \frac{f}{g}$.

(β) Αν $x \geq 4$ να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της g . Αν ορίζεται η g^{-1} να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της.

Λύση

(α) Πεδίο ορισμού της $f : A_f = \mathbb{R}$

Πεδίο ορισμού της $g : A_g = \{x \in \mathbb{R} : 2 - |x - 4| \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\} = [2, 6]$.

Στο σύνολο $A = (A_f \cap A_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} = (2, 6)$ ορίζεται η συνάρτηση $\varphi = \frac{f}{g}$ με τύπο $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{2 - |x - 4|}}$.

(β) Ουσιαστικά θέλουμε να εξετάσουμε αν αντιστρέφεται η συνάρτηση

$$g(x) = \sqrt{2 - |x - 4|} = \sqrt{6 - x} \text{ με } x \in [4, 6].$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η g είναι 1-1 στο $[4, 6]$, άρα αντιστρέφεται.

Τύπος και πεδίο ορισμού της g^{-1}

$$\begin{cases} y = \sqrt{6 - x} \\ 4 \leq x \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y^2 \\ 4 \leq 6 - y^2 \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y^2 \\ 0 \leq y^2 \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y^2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Συνεπώς $g^{-1}(x) = 6 - x^2$, $x \in [0, \sqrt{2}]$.

3. Αν H είναι το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών) και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι

(α) $AH = 2R \sigma\upsilon\nu A$ και

(β) $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 12R^2 - (B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + AB^2)$.

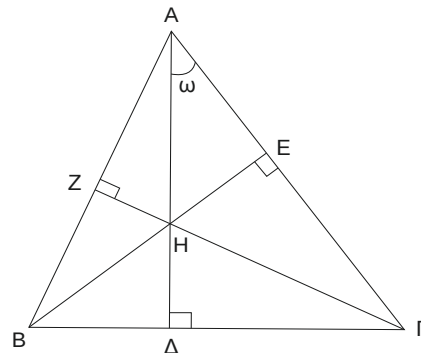
Λύση

(α) Τρίγωνο AEH : $AH = \frac{AE}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{AE}{\eta\mu\Gamma}$

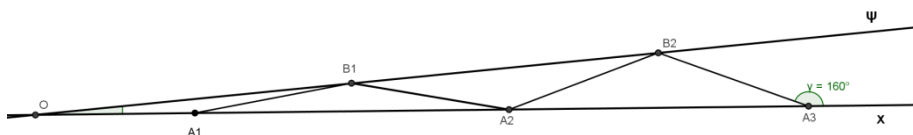
Τρίγωνο AEB : $AE = AB \sigma\upsilon\nu A$.

Άρα $AH = \frac{AB \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma} = \frac{2R\eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma} = 2R \sigma\upsilon\nu A$.

(β) $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 4R^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma) = 4R^2(3 - \eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B - \eta\mu^2 \Gamma) = 12R^2 - (4R^2\eta\mu^2 A + 4R^2\eta\mu^2 B + 4R^2\eta\mu^2 \Gamma) = 12R^2 - (B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + AB^2)$.



4. Δίνεται η γωνία $\angle\chi O\psi$. Πάνω στις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2 έτσι ώστε να ισχύει $OA_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών A_1B_1 και B_2A_3 , η γωνία $\angle B_2A_3\chi = 160^\circ$ και N το συμμετρικό του σημείου A_2 ως προς την $O\psi$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο B_1NMB_2 είναι εγγράψιμο.



Λύση

Έστω $\angle B_1OA_1 = \varphi$ τότε $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_2A_1 = 2\varphi$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle A_1B_1A_2$). Άρα $\angle A_2B_1B_2 = \angle B_1B_2A_2 = 3\varphi$.

Στο τρίγωνο έχουμε: $\angle B_2A_3A_2 = 20^\circ$ και $\angle A_2B_2A_3 = 140^\circ$.

Από το τρίγωνο OB_2A_3 έχουμε $\varphi + 3\varphi + 160^\circ = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 5^\circ$.

Τελικά από το τρίγωνο $\triangle A_1MA_3$ θα πάρουμε

$$\angle A_1MA_3 = 180^\circ - 20^\circ - 2\varphi \Rightarrow \angle A_1MA_3 = 150^\circ \quad (1).$$

Επίσης το τετράπλευρο $B_1NB_2A_2$ είναι ρόμβος, γιατί οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, άρα $\angle B_1NB_2 = \angle B_1A_2B_2 = 150^\circ$ (2). Επομένως από τις (1) και (2) έχουμε

$$\angle A_1MA_3 = \angle B_1NB_2$$

Δηλαδή το τετράπλευρο B_1NMB_2 είναι εγγράψιμο.

