



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/11

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1:

Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1$$

διαίρεται με το 8 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1 = 3 \cdot (3^{2n})^2 - 2 \cdot 3^{2n} - 1 = (3^{2n} - 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= (9^n - 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= (9 - 1)(9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 9 + 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= 8k \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2:

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$, να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + \frac{y^2}{x} = 14 \\ x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 84 \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 14x \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 84x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 14x \\ (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 84x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 14x \\ 14x(x^2 - xy + y^2) = 84x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 14x \\ x^2 - xy + y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10x \\ y = 4 \end{cases}$$

Από όπου παίρνουμε τις λύσεις $(x, y) = (2, 4)$ και $(x, y) = (8, 4)$

Πρόβλημα 3:

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι:

α) $\sigma\varphi A\sigma\varphi B + \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A = 1$

β)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{v_\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{v_\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{v_\gamma} = \frac{1}{R}$$

όπου $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ είναι τα ύψη του τριγώνου από τις κορυφές A, B, Γ αντίστοιχα, και R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - \Gamma \Rightarrow \sigma\varphi(A + B) = \sigma\varphi(\pi - \Gamma)$
 $\Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1}{\sigma\varphi B + \sigma\varphi A} = -\sigma\varphi\Gamma$
 $\Leftrightarrow \sigma\varphi A\sigma\varphi B + \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A = 1$

β) Στο τρίγωνο AA_1B είναι
 $v_\alpha = \gamma\eta\mu B = 2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ και

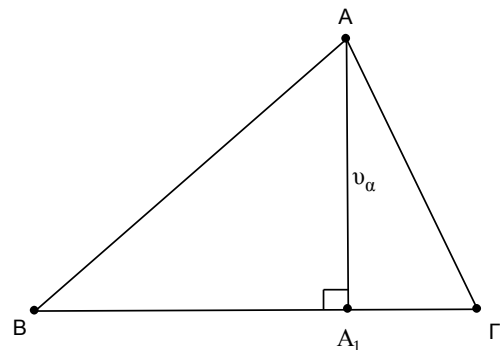
$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{v_\alpha} = \frac{-\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)}{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma} = \frac{1}{2R}(1 - \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma)$$

Ανάλογα έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B}{v_\beta} = \frac{1}{2R}(1 - \sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A)$$

και

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{v_\gamma} = \frac{1}{2R}(1 - \sigma\varphi A\sigma\varphi B).$$



Προσθέτουμε κατά μέλη τις τρεις τελευταίες σχέσεις και, λόγω του (α), έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{v_\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{v_\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{v_\gamma} = \frac{1}{2R}(3 - \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A - \sigma\varphi A\sigma\varphi B) = \frac{1}{R}$$

Πρόβλημα 4:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και M το μέσο του AB . Έστω σημείο Δ πάνω στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και E εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοια ώστε $MB = M\Delta = ME$. Αν Z το σημείο τομής των ευθειών $E\Delta$ και $A\Gamma$ και H, Θ τα σημεία τομής της ευθείας MZ με τις ευθείες BE και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $HB\Theta A$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Φέρουμε $MI \perp E\Delta$, άρα το τετράπλευρο $ZIMA$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο και άρα έχουμε $\angle AIZ = \angle ZMA = \angle \Theta MB$ (1).

Επειδή τα A, E, Δ, B είναι ομοκυκλικά από την υπόθεση, από το εγγράψιμο τετράπλευρο $E\Delta BA$ παίρνουμε $\angle \Theta BM = \angle AEI$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\triangle AEI \approx \triangle \Theta BM$ και επομένως αφού I και M είναι μέσα των $E\Delta$ και AB θα πάρουμε

$$\frac{IE}{BM} = \frac{AE}{B\Theta} = \frac{IA}{\Theta M} \Rightarrow \frac{2(IE)}{2(BM)} = \frac{AE}{B\Theta} \Rightarrow \frac{E\Delta}{AB} = \frac{AE}{B\Theta}.$$

Άρα $\triangle AB\Theta \approx \triangle \Delta EA$. Επομένως $\angle A\Delta E = \angle BA\Theta$ και αφού $\angle A\Delta E = \angle EBA$. Από τις τελευταίες ισότητες παίρνουμε ότι οι ευθείες BE και $A\Theta$ είναι παράλληλες. Τελικά από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MH}{M\Theta} = 1 \Rightarrow MH = M\Theta$$

Δηλαδή $HB\Theta A$ είναι παραλληλόγραμμο.

