



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ με $x + y + \omega = 3$, να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} |x + y - 2\omega| = |x| - |y| \\ |y + \omega - 2x| = |y| - |\omega| \\ |\omega + x - 2y| = |\omega| - |x| \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x + y + \omega = 3$, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3|1 - \omega| = |x| - |y| \\ 3|1 - x| = |y| - |\omega| \\ 3|1 - y| = |\omega| - |x| \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε

$$3(|1 - \omega| + |1 - x| + |1 - y|) = 0 \Leftrightarrow 1 - \omega = 1 - x = 1 - y = 0$$

Άρα έχουμε $x = 1, y = 1, \omega = 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AG > AB$ το M είναι το μέσον της $B\Gamma$, AD είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών B, Γ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle B\Lambda\Gamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

$$ME = MZ = \frac{AG - AB}{2}$$

ΛΥΣΗ

Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε:

Το τρίγωνο $\triangle ABK$ είναι ισοσκελές (K το σημείο τομής της προέκτασης της BE με την AG). Άρα επειδή E μέσο της BK και M μέσο της $B\Gamma$ θα έχουμε $EM \parallel \frac{K\Gamma}{2}$.

Επομένως, αφού $EM \parallel AG$ έπεται $\angle ZEM = \angle \frac{BAG}{2}$ (1)

Το τετράπλευρο $ABDE$ είναι εγγράψιμο άρα

$\angle EDM = \angle \frac{BAG}{2}$ (2). Επίσης από το εγγράψιμο

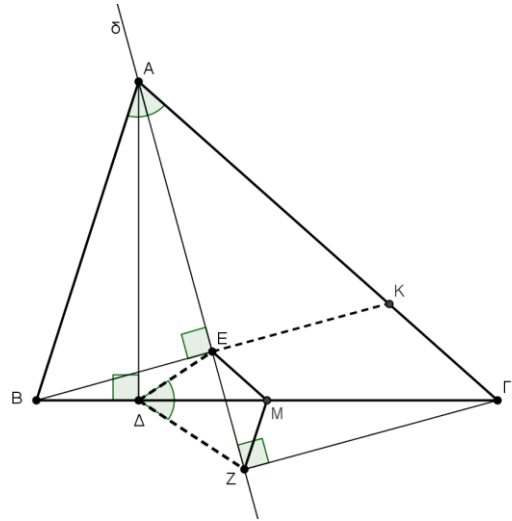
τετράπλευρο $AGZD$ παίρνουμε $\angle MDZ = \angle \frac{BAG}{2}$ (3)

Από τις (1) και (3) το τετράπλευρο $DEMZ$ εγγράψιμο, επομένως

$\angle MZE = \angle EDM = \angle \frac{BAG}{2}$ από την (2), και λόγω

της (1) το τρίγωνο $\triangle MEZ$ είναι ισοσκελές δηλαδή $ME = MZ$. Τελικά

$$MZ = EM = \frac{K\Gamma}{2} = \frac{AG - AK}{2} = \frac{AG - AB}{2}.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 + 5x - \lambda$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ ώστε η μέγιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχάς έχουμε $\lambda < 0$ για να έχει μέγιστη τιμή η f , και η μέγιστη τιμή της είναι

$$y = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = f\left(-\frac{5}{2\lambda}\right) = \lambda\left(-\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2\lambda}\right) - \lambda = \frac{-25 - 4\lambda^2}{4\lambda} > 0.$$

Άρα

$$y = \frac{-25 - 4\lambda^2}{4\lambda} \Leftrightarrow 4\lambda y = -25 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda y + 25 = 0 \quad (1)$$

Επειδή $\lambda \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16y^2 - 16 \cdot 25 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -5 \text{ ή } y \geq 5$$

και αφού $y > 0$ η ελάχιστη τιμή του y είναι $y = 5$, επομένως για $y = 5$ η (1) γίνεται

$$4\lambda^2 + 20y + 25 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{2} < 0.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m και n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m - 1$ και ο m να διαιρεί τον $2n - 1$.

ΛΥΣΗ

Ζητούμε $m, n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $2m - 1 = kn$, $n \in \mathbb{N}$ και $2n - 1 = \lambda m$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

Απαλείφοντας το n από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$m(4 - k\lambda) = k + 2$$

Επίσης, απαλείφοντας το m από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$n(4 - k\lambda) = \lambda + 2$$

Αφού $k + 2 > 0$ και $\lambda + 2 > 0 \Rightarrow 4 - k\lambda > 0 \Rightarrow k\lambda < 4$. Άρα $k\lambda = 1$ ή $k\lambda = 2$ ή $k\lambda = 3$.

1^η περίπτωση: $k\lambda = 1 \Rightarrow k = \lambda = 1 \Rightarrow m = n = 1$.

2^η περίπτωση: $k\lambda = 2 \Rightarrow k = 1, \lambda = 2$ ή $k = 2, \lambda = 1$.

$$\text{Αν } k = 1, \lambda = 2 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{άτοπο.}$$

$$\text{Αν } k = 2, \lambda = 1 \Rightarrow 2n = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{2}, \text{άτοπο.}$$

3^η περίπτωση: $k\lambda = 3 \Rightarrow k = 1, \lambda = 3$ ή $k = 3, \lambda = 1$.

$$\text{Αν } k = 1, \lambda = 3 \Rightarrow m = 3, n = 5.$$

$$\text{Αν } k = 3, \lambda = 1 \Rightarrow m = 5, n = 3.$$

Άρα λύσεις $(1,1), (3,5), (5,3)$.