



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ημερομηνία: 8/12/12

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  με τύπο  $f(k) = ak + \beta$ ,  $\alpha, \beta, k \in \mathbb{Z}$ , (όπου  $\mathbb{Z}$  είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών), τέτοια ώστε οι αριθμοί

$$f(3k+1), f(3k)+1 \text{ και } 3f(k)+1$$

είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί (με κάποια σειρά) για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ . Να βρείτε όλες αυτές τις συναρτήσεις

**Προτεινόμενη λύση:**

Έχουμε από τα δεδομένα του προβλήματος

$$f(3k+1) = \alpha(3k+1) + \beta = 3\alpha k + \beta + \alpha$$

$$f(3k)+1 = 3\alpha k + \beta + 1$$

$$3f(k)+1 = 3(\alpha k + \beta) + 1 = 3\alpha k + \beta + 2\beta + 1$$

Οι τρεις αυτοί αριθμοί έχουν κοινό προσθετέο τον  $3\alpha k + \beta$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , άρα οι αριθμοί  $\alpha, 1, 2\beta + 1$  είναι διαδοχικοί ακέραιοι με κάποια σειρά.

Αφού ο ένας από αυτούς είναι το 1, οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι να είναι οι τριάδες:

$$(1, 2, 3)$$

$$(0, 1, 2)$$

$$(-1, 0, 1)$$

Όμως, επειδή  $2\beta + 1$  είναι περιττός αριθμός, από την πρώτη τριάδα έχουμε:

$$\alpha = 2 \text{ και } 2\beta + 1 = 3 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα  $f(k) = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Η δεύτερη τριάδα απορρίπτεται, αφού  $2\beta + 1$  είναι περιττός αριθμός.

Από την τρίτη τριάδα έχουμε:

$$2\beta + 1 = -1 \Leftrightarrow \beta = -1 \text{ και } \alpha = 0$$

Άρα  $f(k) = -1$ .

Δηλαδή οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος είναι οι:

$$f(k) = 2k + 1 \text{ και } f(k) = -1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Πρόβλημα 2:**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με μήκη πλευρών  $B\Gamma = \alpha$ ,  $A\Gamma = \beta$  και  $AB = \gamma$ .

Να αποδείξετε ότι η ισότητα

$$\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} = \frac{3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

ισχύει αν και μόνο αν  $\angle AB\Gamma = 60^\circ$ .

**Προτεινόμενη λύση:**

Κάνοντας πράξεις στην δεδομένη σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} &= \frac{3}{\alpha + \beta + \gamma} \Leftrightarrow (\beta + \gamma + \alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma) \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 = \alpha\gamma. \end{aligned}$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:

$$\sigma_{\text{υν}}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{2\alpha\gamma} = \frac{1}{2}$$

Η τελευταία ισχύει αν και μόνο αν  $\angle AB\Gamma = 60^\circ$ .

**Πρόβλημα 3:**

Αν η εξίσωση  $x^2 + ax + \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και η εξίσωση  $(x^2 - 2\gamma x + \delta)^2 + \alpha(x^2 - 2\gamma x + \delta) + \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

δεν έχει πραγματικές ρίζες να αποδείξετε ότι:

$$\delta^2 + \alpha\delta + \beta > \gamma^4.$$

**Προτεινόμενη λύση:**

Έστω  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + ax + \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\alpha \\ x_1 x_2 &= \beta \end{aligned}$$

και  $\Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$ .

Θέτω  $x^2 - 2\gamma x + \delta = \omega$  και η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + \alpha\omega + \beta = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις

$$\begin{aligned} x^2 - 2\gamma x + \delta &= x_1 \\ x^2 - 2\gamma x + \delta &= x_2 \end{aligned}$$

Και επειδή δεν έχει ρίζες πραγματικές ρίζες η εξίσωση

$$(x^2 - 2\gamma x + \delta)^2 + \alpha(x^2 - 2\gamma x + \delta) + \beta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x^2 - 2\gamma x + \delta - x_1 &= 0 \\ x^2 - 2\gamma x + \delta - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

δεν έχουν λύση στο  $\mathbb{R}$ , και επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} 4\gamma^2 - 4(\delta - x_1) < 0 \\ 4\gamma^2 - 4(\delta - x_2) < 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \gamma^2 - (\delta - x_1) < 0 \\ \gamma^2 - (\delta - x_2) < 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \gamma^2 < (\delta - x_1) \\ \gamma^2 < (\delta - x_2) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$$\gamma^4 < (\delta - x_1)(\delta - x_2) = \delta^2 - \delta(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \Leftrightarrow \delta^2 + \alpha\delta + \beta > \gamma^4.$$

**Πρόβλημα 4:**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  και έστω  $H$  το σημείο τομής των υψών του  $\Gamma E$  και  $B\Delta$ . Αν ο κύκλος με διάμετρο το  $\Delta E$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Theta$  και  $Z$  αντίστοιχα,  $K$  το σημείο τομής των  $\Theta Z$  και  $AH$  και  $P$  το σημείο τομής της  $AH$  με την  $B\Gamma$  να αποδείξετε ότι:

$$\frac{B\Delta \cdot A\Gamma \cdot AK}{\Gamma E \cdot A\Theta \cdot AP} = 1$$

**Προτεινόμενη λύση:**

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $E\Delta\Gamma B$  έχουμε ότι  $\angle AB\Delta = \angle E\Gamma\Delta$ , άρα τα τρίγωνα  $\triangle A\Delta B$  και  $\triangle A\Gamma E$  είναι όμοια και παίρνουμε:

$$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow AB = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{E\Gamma} \quad (1).$$

Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $\Theta Z\Delta E$  και το εγγράψιμο τετράπλευρο  $E\Delta\Gamma B$  θα έχουμε:

$$\angle AZ\Theta = \angle A\Gamma\Delta = \angle E\Delta\Gamma$$

Επομένως  $\Theta Z \parallel B\Gamma$ , και άρα

$$\triangle A\Theta Z \approx \triangle AB\Gamma$$

Από την τελευταία ομοιότητα των τριγώνων συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{A\Theta}{AB} = \frac{AK}{AP} \Rightarrow AB = \frac{A\Theta \cdot AP}{AK} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\frac{B\Delta \cdot A\Gamma \cdot AK}{\Gamma E \cdot A\Theta \cdot AP} = 1.$$

