



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Ημερομηνία: 10/11/2012

Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' Λυκείου

Πρόβλημα 1 : (α) Να αποδείξετε ότι $\mu^4 + 4\lambda^4 = (\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda)(\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\mu\lambda)$.
(β) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς μ, λ , έτσι ώστε ο αριθμός

$$A = \mu^4 + 4\lambda^4 \text{ να είναι πρώτος.}$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Με πράξεις από το 2^ο μέλος....

(β) Ο αριθμός $A = \mu^4 + 4\lambda^4 = (\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda)(\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\mu\lambda)$. Για να είναι πρώτος σημαίνει ότι πρέπει ο μικρότερος παράγοντας να είναι ο αριθμός 1, άρα

$$\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda = 1 \Leftrightarrow (\mu - \lambda)^2 + \lambda^2 = 1 \text{ ή } (\mu + \lambda)^2 + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\mu = \lambda = 1 \text{ και τότε } A = \mu^4 + 4\lambda^4 = 5, \text{ που είναι πρώτος.}$$

Πρόβλημα 2 : Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Έστω E, Z, Δ τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $\Gamma\Sigma$ το ύψος του τριγώνου να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $\triangle \Delta EZ$ και $\triangle \Delta \Sigma Z$ είναι ίσα και

(β) Η μεσοκάθετη του τμήματος $E\Sigma$ περνά από το σημείο τομής των τμημάτων $\Sigma\Delta$ και EZ .

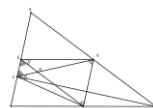
Προτεινόμενη Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\Sigma\Gamma$, επειδή η ΣZ είναι διάμεσός του έχουμε: $\Sigma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma Z$. Επίσης, αφού E, Δ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$, έχουμε: $E\Delta \parallel \Gamma Z$. Άρα $\Sigma Z = E\Delta$ (1).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\Sigma\Gamma$, επειδή η $\Sigma\Delta$ είναι διάμεσός του έχουμε: $\Sigma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$.

Επίσης, αφού E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$, έχουμε: $EZ \parallel \Gamma\Delta$. Άρα $EZ = \Sigma\Delta$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle \Delta EZ$ και $\triangle \Delta \Sigma Z$ είναι ίσα.



(β) Εστω θ το σημείο τομής των τμημάτων $\Sigma\Delta$ και EZ .

Από την παραλληλία των EZ και AD και των AB και ΔZ , παίρνουμε:

$$\angle BEZ = \angle EAF \text{ και } \angle \Delta SE = \angle \Sigma \Delta Z \text{ (3)}$$

Από τα ίσα τρίγωνα $\Delta \Delta EZ$ και $\Delta \Delta \Sigma Z$, έχουμε $\angle \Sigma \Delta Z = \angle EZ\Delta$ και από το παραλληλόγραμμο $EZ\Delta A$ παίρνουμε $\angle EZ\Delta = \angle EAF$. Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών και τις (3) θα έχουμε : $\angle BEZ = \angle \Delta SE$ και επομένως το θ είναι πάνω στην μεσοκάθετη του τμήματος $E\Sigma$.

Πρόβλημα 3 : Αν η εξίσωση $x^2 + ax + 1 = 0$ έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 και η εξίσωση $x^2 + \beta x + 1 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\rho_1 - x_1)(\rho_2 - x_1)(\rho_1 + x_2)(\rho_2 + x_2)$ συναρτήσει των α και β .

Προτεινόμενη Λύση

Από τους τύπους του Vieta έχουμε: $\rho_1 + \rho_2 = -\alpha$, $\rho_1 \rho_2 = 1$ και $x_1 + x_2 = -\beta$, $x_1 x_2 = 1$.

$$\begin{aligned} (\rho_1 - x_1)(\rho_2 - x_1)(\rho_1 + x_2)(\rho_2 + x_2) &= (\rho_1 \rho_2 - \rho_1 x_1 - \rho_2 x_1 + x_1^2)(\rho_1 \rho_2 + \rho_1 x_2 + \rho_2 x_2 + x_2^2) \\ &= (1 - (\rho_1 + \rho_2)x_1 + x_1^2)(1 + (\rho_1 + \rho_2)x_2 + x_2^2) \\ &= (1 + \alpha x_1 + x_1^2)(1 - \alpha x_2 + x_2^2) \\ &= 1 - \alpha x_2 + x_2^2 + \alpha x_1 - \alpha^2 x_1 x_2 + \alpha x_1 x_2^2 \\ &\quad + x_1^2 - \alpha x_2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 \\ &= 1 - \alpha x_2 + x_2^2 + \alpha x_1 - \alpha^2 + \alpha x_2 + x_1^2 - \alpha x_1 + 1 \\ &= 2 + x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 \\ &= 2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - \alpha^2 \\ &= 2 + \beta^2 - 2 - \alpha^2 \\ &= \beta^2 - \alpha^2 . \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4 : Αν οι πλευρές α, β, γ τριγώνου $\Delta AB\Gamma$ είναι ανάλογες των αριθμών $\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: (α) $\angle A > 90^\circ$
(β) $\angle A = 90^\circ + \angle B$

Προτεινόμενη Λύση

Είναι, $\frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma}{1} = \kappa \Leftrightarrow \alpha = \kappa\sqrt{6}, \beta = \kappa\sqrt{3}, \gamma = \kappa$.

$$(\alpha) \cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{3\kappa^2 + \kappa^2 - 6\kappa^2}{2\kappa^2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} < 0, \text{ άρα } \angle A > 90^\circ.$$

(β) Ανάλογα έχουμε $\sin B = \frac{2}{\sqrt{6}}$, οπότε $\eta\mu A = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ και $\eta\mu B = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\sin(A - B) = \sin A \sin B + \eta\mu A \eta\mu B = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \angle A - \angle B = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle A = 90^\circ + \angle B.$$