



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 7/12/13

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1:

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση : $(25x^2 - 5x + 5)(16y^2 + 24y + 17) = 38$

Προτεινόμενη λύση :

Η πιο πάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$\left[\left(5x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{19}{4} \right] \cdot [(4y + 3)^2 + 8] = 38 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι :

$\left[\left(5x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{19}{4} \right] \geq \frac{19}{4}$, $[(4y + 3)^2 + 8] \geq 8$ και $\left[\left(5x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{19}{4} \right] \cdot [(4y + 3)^2 + 8] \geq \frac{19}{4} \cdot 8 = 38$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y .

Συνεπώς, από την (1) έχουμε :

$$\left(5x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \text{ και } (4y + 3)^2 = 0, \text{ άρα } x = \frac{1}{10} \text{ και } y = -\frac{3}{4}$$

Πρόβλημα 2:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{9^x+3}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma = f\left(\frac{1}{2014}\right) + f\left(\frac{2}{2014}\right) + f\left(\frac{3}{2014}\right) + \dots + f\left(\frac{2011}{2014}\right) + f\left(\frac{2012}{2014}\right) + f\left(\frac{2013}{2014}\right)$$

Προτεινόμενη λύση :

Έχουμε :

$$f(x) = \frac{3}{9^x+3} \text{ και } f(1-x) = \frac{3}{9^{1-x}+3} = \frac{3 \cdot 9^x}{9+3 \cdot 9^x} = \frac{9^x}{3+9^x}$$

Αν προσθέσουμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε :

$$f(x) + f(1-x) = \frac{3}{9x+3} + \frac{9^x}{3+9^x} = 1,$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x .

Άρα :

$$\Sigma = 1006 \cdot 1 + f\left(\frac{1007}{2014}\right) = 1006 + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2013}{2}$$

$$\text{Το } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ διότι για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε } f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα 3:

$$\text{Αν } \alpha, \beta \text{ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα : } \begin{cases} \sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[6]{\alpha^3 \cdot \beta^2} = 35 \\ \alpha \cdot \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[6]{\alpha^3 \cdot \beta^4} = 264 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση :

Θέτοντας $\sqrt{\alpha} = x$ και $\sqrt[3]{\beta} = y$, το πιο πάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα :

$$\begin{cases} x + y + xy = 35 \\ x^2y + xy^2 = 264 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 35 \\ xy(x + y) = 264 \end{cases} \quad (1)$$

Αν τώρα θέσουμε $x + y = \kappa$ και $xy = \lambda$, το (1) γράφεται ισοδύναμα :

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = 35 \\ \kappa\lambda = 264 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 35 - \lambda \\ \kappa\lambda = 264 \end{cases} \Leftrightarrow (35 - \lambda)\lambda = 264 \Leftrightarrow \lambda^2 - 35\lambda + 264 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 24)(\lambda - 11) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 24, \lambda = 11, \text{ συνεπώς } \kappa = 11, \kappa = 24 \text{ αντίστοιχα.}$$

Έχουμε :

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ xy = 11 \end{cases} \quad (2) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 24 \end{cases} \quad (3)$$

Οι λύσεις του (2) είναι : $(12 + \sqrt{133}, 12 - \sqrt{133})$ και $(12 - \sqrt{133}, 12 + \sqrt{133})$

Οι λύσεις του (3) είναι : $(3, 8)$ και $(8, 3)$

Τελικά :

$$\alpha = 9, \beta = 512 \text{ ή } \alpha = 64, \beta = 27 \text{ ή } \alpha = (12 + \sqrt{133})^2, \beta = (12 - \sqrt{133})^3 \text{ ή } \alpha = (12 - \sqrt{133})^2, \beta = (12 + \sqrt{133})^3$$

Πρόβλημα 4:

Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, το M είναι μέσο του AB , το N είναι μέσο του MB και το Λ είναι σημείο πάνω στην $B\Gamma$, έτσι ώστε $(\Lambda B) = (BN) = \frac{1}{5}(\Gamma\Lambda)$. Αν K είναι το σημείο τομής της $M\Lambda$ και ΔN και το εμβαδόν του τριγώνου MNK είναι 1, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Προτεινόμενη λύση :

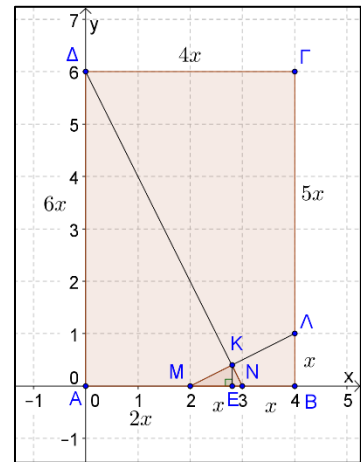
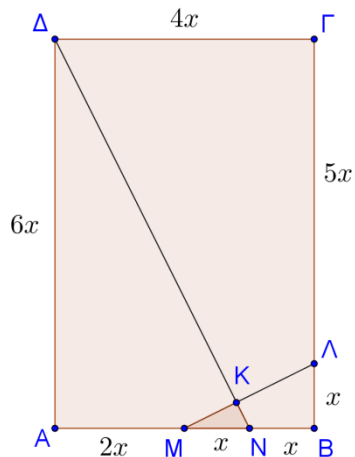
Αν προσαρμόσουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ κατάλληλα (επιλέγοντας $x = 1$) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουμε :

$$\lambda_{\Delta N} = \frac{0-6}{3-0} = -2 \text{ και } \lambda_{M\Lambda} = \frac{1-0}{4-2} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς :

$$(\Delta N) : y = -2x + 6 \quad (1)$$

$$(M\Lambda) : y = \frac{1}{2}x - 1 \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) έχουμε για το σημείο K ότι :

$$-2x + 6 = \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5} \text{ και } y = -\frac{28}{5} + 6 = \frac{2}{5}$$

Άρα $KE = 0,4$ μονάδες και $x = 1$ μονάδα, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του τριγώνου MNK είναι 0,2 τετραγωνικές μονάδες, 5 φορές μικρότερο από ότι το «πραγματικό».

Συμπεραίνουμε ότι το «πραγματικό» εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ θα είναι 5 φορές μεγαλύτερο από ότι το $6 \cdot 4 = 24$ τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή $24 \cdot 5 = 120$ τετραγωνικές μονάδες.