



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/13

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Τρεις πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 12 \quad (1) \\2xy + 3xz + 6yz &= 48 \quad (2)\end{aligned}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 48$$

(β) Να βρείτε τις τιμές των x, y και z στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

(α) Από την (1) έχουμε:

$$(x + 2y + 3z)^2 = 144 \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2(2xy + 3xz + 6yz) = 144$$

Λόγω της (2) έχουμε:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144 - 2 \cdot 48 = 48$$

(β) $(x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 + (x - 3z)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 + 4y^2 - 12yz + 9z^2 + x^2 - 6xz + 9z^2 = 2(x^2 + 4y^2 + 9z^2) - 2(2xy + 3xz + 6yz) = 2 \cdot 48 - 2 \cdot 48 = 0$
Έχουμε $(x - 2y)^2 \geq 0$, $(2y - 3z)^2$ και $(x - 3z)^2 \geq 0$, άρα $x - 2y = 0$,
 $2y - 3z = 0$ και $x - 3z = 0$. Εύκολα προκύπτει από την (1) ότι:

$$x = 4, y = 2 \text{ και } z = \frac{4}{3}$$

2. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και η γωνιά $\hat{B} = 80^\circ$. Αν $AD = AE$ και $AK = DE$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιάς $\widehat{FK\Delta}$

Λύση:

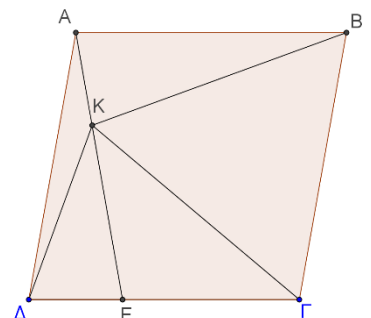
Φέρουμε τη BK . Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle ABK$ είναι ίσα, αφού $DE = AK$, $AD = AB$ και $\widehat{ADE} = \widehat{KAB} = 80^\circ$ ($AD = AE$, $\widehat{ADE}, \widehat{KAB}$ εντός εναλλάξ γωνίες).

Λόγω της ισότητας των πιο πάνω ισοσκελών τριγώνων, έχουμε:

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{KAB} = \widehat{BKA} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 20^\circ \text{ και } \widehat{KBT} = 60^\circ$$

Το τρίγωνο $\triangle BKT$ είναι ισόπλευρο, αφού $BK = BT \Rightarrow \widehat{BKT} = \widehat{BTK} = 60^\circ$.

Συνεπώς, $\widehat{KTE} = 40^\circ$ και αφού $KT = TK$, έχουμε $\widehat{FK\Delta} = \widehat{FKT} = 70^\circ$.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ax^2 + 3\gamma$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$-3 \leq f(1) \leq -2 \text{ και } -5 \leq f(2) \leq 7$$

Να δείξετε ότι:

$$-10 \leq f(-3) \leq \frac{71}{3}$$

Λύση:

Έχουμε $f(1) = 2a + 3\gamma$ και $f(2) = 8a + 3\gamma$. Άρα:

$$f(2) - f(1) = 6a \Rightarrow a = \frac{1}{6}[f(2) - f(1)]$$

$$f(1) = 2 \cdot \frac{1}{6}[f(2) - f(1)] + 3\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{9}[f(2) - 4f(1)]$$

Συνεπώς:

$$f(-3) = 18a + 3\gamma = \dots = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$$

Αφού:

$$-5 \leq f(2) \leq 7 \Rightarrow -\frac{40}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq \frac{56}{3}$$

$$-3 \leq f(1) \leq -2 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq -\frac{5}{3}f(1) \leq 5$$

Τελικά:

$$-10 \leq f(-3) \leq \frac{71}{3}$$

4. Έστω α και m δύο φυσικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 + (\alpha + 1)^2 = m^4 + (m + 1)^4$$

Λύση:

Έστω ότι η πιο πάνω σχέση ισχύει. Τότε ισοδύναμα έχουμε:

$$2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 2m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 2$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \alpha + 1) = 2(m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = (m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1) \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = (m^2 + m + 1)^2$$

Το Β' μέλος είναι τετράγωνος αριθμός, όμως το Α' μέλος δεν μπορεί να είναι τετράγωνος αφού η διακρίνουσα $\Delta = -3$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Με την υπόθεση που είχαμε κάνει στην αρχή καταλήγουμε σε άτοπο.