



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 6/12/14

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Δίνονται τα κλάσματα

$$A = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \quad B = \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \quad \Gamma = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

με α, β, γ να είναι θετικοί ακέραιοι και $\gamma \leq \beta \leq \alpha$. Να βρείτε όλες τις τριάδες (α, β, γ) για τις οποίες τα κλάσματα A, B, Γ είναι όλα ακέραιοι αριθμοί.

Προτεινόμενη λύση:

Για να είναι τα κλάσματα A, B, Γ είναι όλα ακέραιοι αριθμοί θα πρέπει να ισχύει $\beta + \gamma = \kappa\alpha$, $\gamma + \alpha = \lambda\beta$ και $\alpha + \beta = \mu\gamma$, για κάποιους $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Από την δεδομένη ανισότητα $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ θα πάρουμε

$$\beta \leq \alpha \text{ και } \gamma \leq \alpha \Rightarrow \beta + \gamma \leq 2\alpha \Rightarrow \kappa\alpha \leq 2\alpha \Rightarrow \kappa \leq 2 \Rightarrow \kappa \in \{1, 2\}$$

- Αν $\kappa = 2$ έχουμε: $\beta + \gamma = 2\alpha$ και αφού α, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι με $\beta \leq \alpha$ και $\gamma \leq \alpha$ θα πρέπει να ισχύει $\beta = \gamma = \alpha$ για να επαληθεύεται η ισότητα. Επομένως αν $\alpha = \beta = \gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.
- Αν $\kappa = 1$ παίρνουμε: $\beta + \gamma = \alpha$. Αφού όμως $\gamma + \alpha = \lambda\beta \Rightarrow \gamma + \beta + \gamma = \lambda\beta \Rightarrow 2\gamma = (\lambda - 1)\beta$, και επειδή $\beta \geq \gamma$ έχουμε $2\gamma = (\lambda - 1)\beta \geq (\lambda - 1)\gamma \Rightarrow \lambda - 1 \leq 2 \Rightarrow \lambda \leq 3 \Rightarrow \lambda \in \{1, 2, 3\}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
 - Αν $\lambda = 1$ έχουμε $\gamma + \alpha = \beta$, άτοπο αφού α, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι με $\beta \leq \alpha$.
 - Αν $\lambda = 2$ παίρνουμε $\gamma + \alpha = 2\beta$ και αφού $\beta + \gamma = \alpha$, προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ισότητες έχουμε $2\gamma + \alpha + \beta = \alpha + 2\beta \Rightarrow \beta = 2\gamma$ και $\alpha = \beta + \gamma = 3\gamma$. Τότε για $\gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (3\rho, 2\rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.
 - Αν $\lambda = 3$ παίρνουμε $\gamma + \alpha = 3\beta$ και αφού $\beta + \gamma = \alpha$, προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ισότητες έχουμε $2\gamma + \alpha + \beta = \alpha + 3\beta \Rightarrow \beta = \gamma$ και $\alpha = \beta + \gamma = 2\gamma$. Τότε για $\gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (2\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.

Επομένως όλες οι λύσεις είναι οι τριάδες: $(\rho, \rho, \rho), (3\rho, 2\rho, \rho), (2\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$.

Πρόβλημα 2: Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι ανισότητες

$$\left| \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} \right| < 4, \quad \left| \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{3} \right| < 4, \quad \left| \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{3} \right| < 4.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{16 + \frac{2\alpha\beta}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\beta\gamma}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\gamma\alpha}{3}} > \frac{5}{6}(\alpha + \beta + \gamma)$$

Προτεινόμενη λύση:

Από την δεδομένη σχέση $\left| \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} \right| < 4$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} \right| < 4 &\Rightarrow \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9} < 16 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9} < 16 + \frac{2\alpha\beta}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} \right)^2 < 16 + \frac{2\alpha\beta}{3} \\ &\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} < \sqrt{16 + \frac{2\alpha\beta}{3}} \quad (1). \end{aligned}$$

Όμοια από τις σχέσεις $\left| \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{3} \right| < 4$, $\left| \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{3} \right| < 4$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} < \sqrt{16 + \frac{2\beta\gamma}{3}} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{3} < \sqrt{16 + \frac{2\gamma\alpha}{3}} \quad (3).$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{3} &< \sqrt{16 + \frac{2\alpha\beta}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\beta\gamma}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\gamma\alpha}{3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) < \sqrt{16 + \frac{2\alpha\beta}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\beta\gamma}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\gamma\alpha}{3}} \end{aligned}$$

Και τελικά θα έχουμε

$$\sqrt{16 + \frac{2\alpha\beta}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\beta\gamma}{3}} + \sqrt{16 + \frac{2\gamma\alpha}{3}} > \frac{5}{6}(\alpha + \beta + \gamma)$$

Πρόβλημα 3: Δίνεται το σύνολο n διαδοχικών φυσικών αριθμών $K = \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\}$.

Αν, διαγράφοντας δύο διαδοχικούς αριθμούς του συνόλου K , ο μέσος όρος των υπόλοιπων αριθμών του συνόλου είναι $\frac{105}{4}$,

(α) να υπολογίσετε την τιμή του n

(β) να βρείτε τους αριθμούς που διαγράψαμε.

Προτεινόμενη λύση:

(α) Έστω ότι οι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που διαγράφουμε είναι οι α και $\alpha + 1$.

Τότε θα έχουμε:

$$\frac{\frac{v(v+1)}{2} - (2\alpha + 1)}{v-2} = \frac{105}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 + 2v - 8\alpha - 4 = 105v - 210 \Leftrightarrow 2v^2 - 103v - 8\alpha + 206 = 0.$$

Αφού οι v, α είναι φυσικοί αριθμοί, από την πιο πάνω εξίσωση προκύπτει ότι το v πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Έστω λοιπόν ότι $v = 2\rho, \rho \in \mathbb{N}$.

$$2v^2 - 103v - 8\alpha + 206 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4\rho^2 - 206\rho - 8\alpha + 206 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\rho^2 - 103\rho - 4\alpha + 103 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = 4\rho^2 - 103(\rho - 1).$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι το $(\rho - 1)$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4. Έτσι, $\rho - 1 = 4t, t \in \mathbb{N}$ και αφού $v = 2\rho$, έχουμε:

$$4\alpha = 4\rho^2 - 103(\rho - 1) \Leftrightarrow 4\alpha = 4(1 + 4t)^2 - 103 \cdot 4t \Leftrightarrow \alpha = 16t^2 - 95t + 1.$$

Τα $\alpha, \alpha + 1 \in \{1, 2, 3, 4, \dots, v - 1, v\}$. Τότε ισχύει :

$$1 \leq \alpha < v \Leftrightarrow 1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < v \Leftrightarrow 1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < 8t + 2.$$

Λύνοντας τις ανισώσεις $1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < 8t + 2$

$$\Rightarrow t = 6 \text{ (Μοναδική λύση) και } v = 2\rho = (8t + 2) = 50.$$

(β) Αντικαθιστώντας $v = 50$ στην εξίσωση $2v^2 - 103v - 8\alpha + 206 = 0$ θα έχουμε

$$2(50)^2 - 103 \cdot 50 - 8\alpha + 206 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha = 56 \Leftrightarrow \alpha = 7$$

Επομένως οι αριθμοί που διαγράφουμε είναι 7 και 8.

Πρόβλημα 4: Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O, ρ) . Οι διχοτόμοι (δ_1) και (δ_2) των γωνιών $\angle A$ και $\angle \Gamma$ του τριγώνου τέμνουν τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Έστω I το σημείο τομής των (δ_1) και (δ_2) . Από το σημείο I φέρουμε παράλληλη ευθεία (ε) προς την $A\Gamma$ η οποία τέμνει την ευθεία ΔE στο σημείο P . Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $\triangle DIE$ και $\triangle BE$ είναι ίσα

(β) η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PBA$.

Προτεινόμενη λύση:

(α) η γωνία $\angle B\Delta I$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle ABI$ είναι

$$\angle B\Delta I = \angle \frac{A}{2} + \angle \frac{B}{2}$$

Επίσης

$$\angle IB\Delta = \angle IB\Gamma + \angle \Gamma B\Delta = \angle \frac{B}{2} + \angle \Gamma B\Delta$$

παίρνουμε ότι $\angle EBP = \angle EBA$, δηλαδή η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PBA$.

