ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/12/15 *Ώρα εξέτασης*: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{|1-x|}{1-|x|}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

β) Να αποδείξετε ότι: αν $|x|<\sqrt{2}-1$, τότε $f(x)<\sqrt{2}+1$.

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A=\{x\in R: 1-|x|\neq 0\}=\{x\in R: |x|\neq 1\}=R-\{\pm 1\}.$$

Ο τύπος της συνάρτησης, μετά την απαλοιφή των απολύτων, γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & ,x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ 1\ , & x\in[0,1) \\ -1\ , & x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

Για το όριο στο 1, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$$

Άρα δεν υπάρχει το όριο στο 1.

β) $|x|<\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\sqrt{2}+1<x<\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\sqrt{2}+1<-x<\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}+2<1-x<\sqrt{2}.\ \text{Άρα}\ \boxed{0<|1-x|=1-x<\sqrt{2}}:(1)\ .$$

Επίσης, $|x|<\sqrt{2}-1 \Rightarrow -|x|>-\sqrt{2}+1 \Rightarrow 1-|x|>-\sqrt{2}+2$

$$\boxed{0 < \frac{1}{1-|x|} < \frac{1}{-\sqrt{2}+2}} : (2) .$$

Οι ανισότητες (1) και (2) είναι ομοιόστροφες και έχουν θετικά μέλη και συνεπώς, αν τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1.$$

Δηλαδή $f(x) < \sqrt{2}+1$.

<u>Πρόβλημα 2</u>: Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς N έτσι ώστε το N^2 να είναι πενταψήφιος αριθμός και το 54 να διαιρεί το N^2.

<u>Λύση:</u>

Θα έχουμε ότι

$$N^2 = 54\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

Αναλύοντας το 54 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων θα έχουμε

$$N^2 = 2 \cdot 3^3 \kappa$$

Για να είναι το δεύτερο μέρος τέλειο τετράγωνο θα πρέπει να έχουμε $\kappa = 2 \cdot 3 \cdot \rho^2$, $\rho \in \mathbb{N}$.

Τότε

$$N^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot \rho^2 \ \text{ ή } \ N = 2 \cdot 3^2 \cdot \rho \ \text{ ή } \ N = 18\rho.$$

Αφού όμως το N^2 είναι πενταψήφιος αριθμός θα πάρουμε

$$10^4 < N^2 < 10^5 \ \text{ ή } \ 10^2 < N < 10^2\sqrt{10}$$

Αντικαθιστώντας το $N = 18\rho$ θα έχουμε

$$10^2 < 18\rho < 10^2\sqrt{10} \quad \text{ή} \quad \frac{100}{18} < \rho < \frac{100}{18}\sqrt{10}$$

Επειδή $\rho \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$6 \leq \rho \leq 17$$

Επομένως το ρ παίρνει τιμές $\rho = 6,7,8,\ldots,17$ και άρα

$$N = 18\rho \Rightarrow N = 18 \cdot 6, 18 \cdot 7, \ldots, 18 \cdot 17$$

__Πρόβλημα 3:__ Οι μαθητές μιάς τάξης Λυκείου ρώτησαν τον καθηγητή τους των Μαθηματικών να τους πεί τις ηλικίες των τριών παιδιών του. Εκείνος τους απάντησε ως εξής:
«*Το γινόμενο του πενταπλάσιου της ηλικίας του μικρότερου παιδιού μου επί το τετράγωνο του τριπλάσιου της ηλικίας του μεσαίου παιδιού μου ισούται με τον κύβο του διπλάσιου της ηλικίας του μεγαλύτερου παιδιού μου. Ακόμα το γινόμενο των ηλικιών και των τριών παιδιών μου είναι μικρότερο του* 1000».
Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του καθηγητή.
__Λύση:__
Αν ονομάσουμε x την ηλικία του μικρότερου παιδιού, y την ηλικία του μεσαίου παιδιού και z την ηλικία του μεγαλύτερου παιδιού τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε:

$$\begin{cases}(5x)(3y)^2 = (2z)^3 & (1)\\ xyz < 1000 & (2)\end{cases}$$

Από την (1) θα έχουμε

$$(5x)(3y)^2 = (2z)^3 \Leftrightarrow 45xy^2 = 8z^3 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5xy^2 = 2^3z^3$$

Άρα από την τελευταία θα έχουμε ότι

$$15/\mathrm{z} \quad ή \quad \mathrm{z} = 15t, \;\; t \in \mathbb{N}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με xz^2 και έχουμε

$$3^2 \cdot 5xy^2 \cdot (xz^2) = 2^3z^3 \cdot (xz^2) \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3xz^5$$

Επειδή $\mathrm{z} = 15t$ η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3xz^5 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3x \cdot 3^5 \cdot 5^5t^5 \Leftrightarrow x^2y^2z^2 = 2^3x \cdot 3^3 \cdot 5^4t^5 \quad (3)$$

Από την (2) θα έχουμε

$$xyz < 1000 \Leftrightarrow x^2y^2z^2 < 2^6 \cdot 5^6 \quad (4)$$

Η (4) λόγω της (3) γίνεται

$$2^3x \cdot 3^3 \cdot 5^4t^5 < 2^6 \cdot 5^6 \Leftrightarrow 27xt^5 < 200 \quad (5)$$

- Αν $t \geq 2$ αφού $x \geq 1$ θα έχουμε

  $$xt^5 \geq 2^5 \quad ή \quad 27xt^5 \geq 27 \cdot 2^5 > 200$$

  άτοπο λόγω της (5).
- Επομένως $t < 2$, και αφού $t \in \mathbb{N}$ θα πάρουμε $t = 1$.

Άρα , $\mathrm{z} = 15t \Leftrightarrow \mathrm{z} = 15$. Από την (5) παίρνουμε

$$27xt^5 < 200 \Leftrightarrow x < \frac{200}{27} \quad δηλαδή \;\; x \leq 7$$

Δηλαδή $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.
Αντικαθιστώντας $\mathrm{z} = 15$ στην (1) θα έχουμε

$$3^2 \cdot 5xy^2 = 2^3z^3 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5xy^2 = 2^3 3^3 5^3 \Leftrightarrow xy^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Δοκιμάζοντας τις τιμές $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ η μόνη περίπτωση ο y να είναι θετικός ακέραιος είναι όταν $x = 6$ και τότε $6y^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \Leftrightarrow y^2 = 2^2 \cdot 5^2 \Leftrightarrow y = 10$
Άρα οι ηλικίες των παιδιών του καθηγητή θα είναι

$$(x, y, z) = (6,10,15)$$

Πρόβλημα 4: Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (C_1) και (C_2) με κέντρα K και O αντίστοιχα οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B. Από το σημείο A φέρουμε κάθετη στην ευθεία AB η οποία τέμνει τον κύκλο (C_2) ξανά στο σημείο E. Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο P του AE και ακτίνα PA φέρουμε κύκλο (C) που τέμνει τους κύκλους (C_1) και (C_2) στα σημεία T και Z αντίστοιχα. Αν η ευθεία TZ τέμνει τον (C_2) στο σημείο N και τον (C_1) στο σημείο Θ, να αποδείξετε:

α) Το τετράπλευρο $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\Theta N = TZ$

γ) Τα σημεία P, E, Z, O είναι ομοκυκλικά.

Λύση:

Κατ' αρχήν η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου (C) στο A και έτσι $\angle PAB = \angle EAB = 90^0$ και συνεπώς η EB είναι διάμετρος του κύκλου (C_2). Επίσης, επειδή οι κύκλοι (C_1) και (C_2) είναι ίσοι, τα τόξα $\widehat{ATB}$ και $\widehat{ANB}$ είναι ίσα και συνεπώς $\angle A\Theta B = \angle AZB$ (σχήμα).

α) $\angle B\Theta Z = \angle B\Theta T = \angle TAB = \angle AZT = \angle AZ\Theta$, άρα $B\Theta \parallel ZA :$ (1).

$\angle A\Theta B = \angle AZB$ και αφού $\angle B\Theta Z = \angle AZ\Theta$, με αφαίρεση παίρνουμε $\angle A\Theta Z = \angle \Theta ZB$, απ' όπου $A\Theta \parallel BZ :$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα

$$I\Theta = IZ : (3).$$

Το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο είναι παραλληλόγραμμο, διότι: $\angle ABN = \angle AZN = \angle AZT = \angle BAT$, άρα $BN \parallel AT$ και $\angle BAN = \angle NZB = \angle \Theta ZB = \angle A\Theta Z = \angle A\Theta T = \angle ABT$, άρα $AN \parallel BT$. Συνεπώς οι διαγώνιοι του $AZB\Theta$ διχοτομούνται, απ' όπου

$$IN = IT : (4).$$

Από τις (3), (4) έχουμε $I\Theta - IN = IZ - IT \Longrightarrow \boxed{\Theta N = TZ}$.

γ) EB είναι διάμετρος του κύκλου (C_2) και

$\angle EOZ = 2\angle EBZ = 2\angle EAZ = 2\angle PAZ = \angle PAZ + \angle PZA = \angle EPZ$, αφού το τρίγωνο ΔAPZ είναι ισοσκελές και $\angle EPZ$ εξωτερική του γωνία. Άρα $\angle EOZ = \angle EPZ$, συνεπώς το τεράπλευρο $PEZO$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή τα σημεία P, E, Z, O είναι ομοκυκλικά.