



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2015

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

α) Να δείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A .

$$A = \frac{1}{3 + \sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$$

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (α) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3+\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{9} + \sqrt{11} - \sqrt{10} + \sqrt{12} - \sqrt{11} + \dots + \sqrt{400} - \sqrt{399} \\ &= \sqrt{400} - \sqrt{9} = 20 - 3 = 17 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Έστω x και y θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{5x} - \sqrt{5y} + \sqrt{5xy} = 5$. Να βρείτε την τιμή του $x + y$.

Λύση

$$\begin{aligned} & x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{5x} - \sqrt{5y} + \sqrt{5xy} = 5. \\ \Rightarrow & x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{5xy} = 5 + \sqrt{5x} + \sqrt{5y} \\ \Rightarrow & \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{5}) = \sqrt{5}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{5}) \\ \Rightarrow & \sqrt{xy} = \sqrt{5} \\ \Rightarrow & xy = 5 \end{aligned}$$

Αφού x και y θετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε $(x, y) = (1, 5)$ ή $(x, y) = (5, 1)$.

Άρα $x + y = 6$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi^2 x + 1}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Να προσδιορίσετε το πεδίο τιμών της f

Λύση

$$f(x) = \frac{\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi^2 x + 1} = \frac{\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\tau\varepsilon\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^3 x = \frac{\eta\mu^3 2x}{8}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < x &\leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < 2x < \pi \Rightarrow \\ -1 &\leq \eta\mu 2x \leq 1 \\ -1 &\leq \eta\mu^3 2x \leq 1 \\ -\frac{1}{8} &\leq \frac{\eta\mu^3 2x}{8} \leq \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} &\leq f(x) \leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος AD και διάμεσο AM . Από σημείο P του ύψους AD φέρουμε τις PE και PZ κάθετες αντίστοιχα στις AB και AG (E και Z ίχνη των καθέτων στις AB και AG). Επίσης προεκτείνουμε την AD κατά τμήμα $\Delta H = AD$ και την AM κατά τμήμα $M\Theta = AM$. Αν οι BH και $\Gamma\Theta$ τέμνονται στο K , να αποδείξετε ότι

A) Το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές

B) Το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

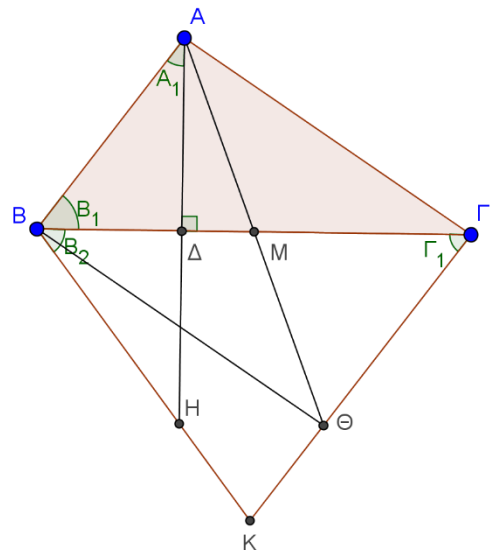
A) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta H$ είναι ορθογώνια, έχουν κοινή πλευρά την $B\Delta$ και επίσης έχουν τις $AD = \Delta H$ (δεδομένο) δηλαδή τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Ίσα τρίγωνα έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα μεταξύ τους άρα $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (1)

$AM = M\Theta$ (δεδομένο) και $BM = M\Gamma$ (M μέσο $B\Gamma$) άρα το τετράπλευρο $AG\Theta B$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται έτσι $AB \parallel \Gamma\Theta$.

Προκύπτει ότι $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$ (2) (εντός εναλλάξ)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_1}$ άρα το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές αφού οι παρα την βάση του γωνίες είναι ίσες



$$\text{B) } \left. \begin{array}{l} PE \perp AB \Rightarrow \widehat{PEA} = 90^\circ \\ PZ \perp AG \Rightarrow \widehat{PZA} = 90^\circ \end{array} \right\} \widehat{PEA} + \widehat{PZA} = 180^\circ$$

Το τετράπλευρο $AEPZ$ είναι εγγράψιμο διότι δύο απέναντι γωνίες του $(\widehat{PEA}, \widehat{PZA})$ είναι παραπληρωματικές.

$$\widehat{EAP} = \widehat{E\hat{Z}P} = A_1 \quad (3) \text{ βαίνουν στο ίδιο τόξο}$$

$$\text{Από το τρίγωνο } AB\Delta \text{ έχουμε } \widehat{EB\Gamma} = 90^\circ - \widehat{A_1} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\widehat{EB\Gamma} + \widehat{E\hat{Z}G} = (90^\circ - \widehat{A_1}) + (90^\circ + \widehat{A_1}) = 180^\circ$$

Δηλαδή το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο διότι οι δύο απέναντι γωνίες του $(\widehat{EB\Gamma}, \widehat{E\hat{Z}G})$ είναι παραπληρωματικές.

