



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/11/2016

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

- α) Να γράψετε την παράσταση $A = x^4 + 4$ ως γινόμενο δυο τριωνύμων της μορφής $x^2 + ax + \beta$.
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 1$, ο θετικός ακέραιος αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι ποτέ πρώτος.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

- α) Η παράσταση $A = x^4 + 4$ γράφεται

$$A = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

- β) Επομένως από το (α) θα έχουμε

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

Και επειδή για $n > 1$ ισχύει

$$1 < n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2$$

Ο αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι ποτέ πρώτος.

Πρόβλημα 2

Αν ο αριθμός n είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 3.$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.

Για $n = 3$ θα έχουμε

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} < \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad 1 + \frac{1}{27} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{35}{216} < \frac{36}{216}$$

που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{k^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 3 \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} \quad (2)$$

Επομένως από (1) και (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\kappa} + < \frac{3}{2} - \frac{1}{\kappa + 1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{(\kappa + 1)^3} < \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa + 1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{(\kappa + 1)^3} < \frac{1}{\kappa(\kappa + 1)}$$

$$\quad \text{ή} \quad \frac{1}{(\kappa + 1)^2} < \frac{1}{\kappa} \quad \text{ή} \quad \kappa^2 + \kappa + 1 > 0$$

που ισχύει.

Επομένως, η πρόταση ισχύει για κάθε $\kappa \geq 3$.

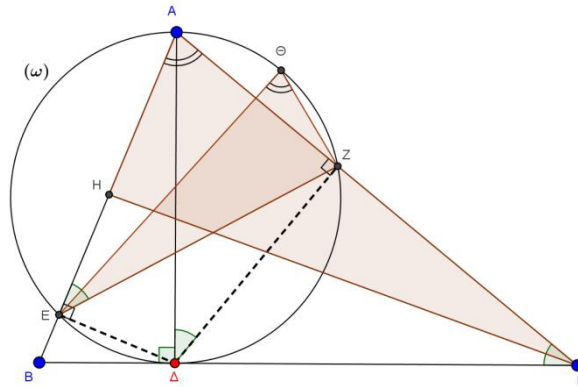
Πρόβλημα 3

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος AD . Ο κύκλος (ω) , διαμέτρου AD τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία E, Z αντίστοιχα. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle A\Gamma B$ τέμνει την πλευρά AB στο H και η διχοτόμος της γωνίας $\angle ZEA$ τέμνει τον κύκλο (ω) στο σημείο Θ .

Να αποδείξετε ότι: α) Τα τρίγωνα $\triangle GAH, \triangle E\Theta Z$ είναι όμοια

$$\beta) \frac{\Theta E}{\Theta Z} = \frac{B\Gamma}{BH}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:



Σχήμα 1

α) Έχουμε ότι

$$\angle EAG = \angle E\Theta Z \quad (1)$$

γιατί οι γωνίες είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου διαμέτρου AD .

Όμοια,

$$\angle AEZ = \angle ADZ \quad (2)$$

Επίσης,

$$\angle ADZ = \angle A\Gamma B \quad (3)$$

γιατί έχουν πλευρές κάθετες.

Από τις (2) και (3) παίρνουμε

$$\angle AEZ = \angle A\Gamma B \Rightarrow \frac{\angle AEZ}{2} = \frac{\angle A\Gamma B}{2} \quad \text{ή} \quad \angle \Theta EZ = \angle A\Gamma H \quad (4)$$

Από τις (1) και (4) συμπεραίνουμε ότι

$$\triangle GAH \approx \triangle E\Theta Z$$

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει

$$\frac{\Theta E}{\Theta Z} = \frac{A\Gamma}{AH} \quad (5)$$

Από το θεώρημα των διχοτόμων στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ θα έχουμε

$$\frac{AH}{AG} = \frac{BH}{BG} \quad \text{ή} \quad \frac{AG}{AH} = \frac{BG}{BH} \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) θα έχουμε

$$\frac{\theta E}{\theta Z} = \frac{BG}{BH}$$

Πρόβλημα 4

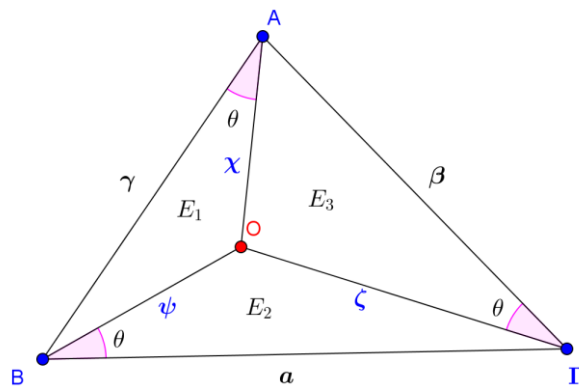
α) Σε κάθε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι (με E συμβολίζουμε το εμβαδόν του $\triangle AB\Gamma$):

$$(i) \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\varphi A \quad \text{και} \quad (ii) \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4E}$$

β) Αν O είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, ώστε $\angle OAB = \angle OBG = \angle OGA = \theta$, να αποδείξετε ότι $\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

α)



Σχήμα 2

(i) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ θα έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\eta\mu A \frac{\sigma\eta\nu A}{\eta\mu A} \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\eta\mu A\sigma\varphi A$$

Όμως το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ γράφεται

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A \quad \text{ή} \quad 2E = \beta\gamma\eta\mu A$$

Επομένως, η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\eta\mu A\sigma\varphi A \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\varphi A$$

(ii) Εφαρμόζοντας την ισότητα του (i) τρεις φορές θα έχουμε

$$\sigma\varphi A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{4E}$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{4E}$$

$$\sigma\varphi \Gamma = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{4E}$$

Προσθέτοντας, τις προηγούμενες εξισώσεις κατά μέλη έχουμε,

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4E}$$

β) Αν συμβολίσουμε

$$OA = \chi, \quad OB = \psi, \quad OG = \zeta \quad (\text{Σχήμα 1})$$

και τα εμβαδά των τριγώνων

$$\Delta OAB = E_1, \quad \Delta OBG = E_2, \quad \Delta OGA = E_3$$

εφαρμόζοντας την σχέση (i) για την γωνία θ στα τρία τρίγωνα ΔOAB , ΔOBG και ΔOGA θα πάρουμε αντίστοιχα

$$4E_1 \sigma \varphi \theta = \chi^2 + \gamma^2 - \psi^2, \quad 4E_2 \sigma \varphi \theta = \psi^2 + \alpha^2 - \zeta^2 \quad \text{και} \quad 4E_3 \sigma \varphi \theta = \zeta^2 + \beta^2 - \chi^2$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις αυτές ισότητες θα έχουμε

$$4\sigma \varphi \theta (E_1 + E_2 + E_3) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{ή} \quad \sigma \varphi \theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4E}$$

και από το (ii) έχουμε

$$\sigma \varphi \theta = \sigma \varphi A + \sigma \varphi B + \sigma \varphi \Gamma.$$