



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 8/12/18

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ακεραίων για τα οποία ισχύει

$$(x - 1)(21 - x) = y^2$$

Λύση

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ακεραίων για τα οποία ισχύει

$$(x - 1)(21 - x) = y^2$$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$21x - x^2 - 21 + x = y^2$$

$$x^2 - 22x = -21 - y^2$$

$$x^2 - 22x + 121 = 100 - y^2$$

$$(x - 11)^2 = 100 - y^2 : (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι $100 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < y < 10$, απ' όπου $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Από την (1) προκύπτει και ότι το $100 - y^2$ είναι και τέλειο τετράγωνο και αυτό συμβαίνει για $y \in \{6, 8, 10\}$.

- Αν $y = 6$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 64 \Rightarrow x - 11 = \pm 8 \Rightarrow x = 19$ ή $x = 3$
- Αν $y = 8$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 36 \Rightarrow x - 11 = \pm 6 \Rightarrow x = 17$ ή $x = 5$
- Αν $y = 10$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 0 \Rightarrow x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

Συνεπώς $(x, y) \in \{(19, 6), (3, 6), (17, 8), (5, 8), (11, 10)\}$

2^{ος} τρόπος

Προφανώς έχουμε $(x - 1)(21 - x) \geq 0$, απ' όπου $1 \leq x \leq 21$ και, αφού το x ακέραιος,
 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$

Όμως $(x - 1)(21 - x)$ τέλειο τετράγωνο θετικού ακεραίου, οπότε εύκολα καταλήγουμε ότι
 $x \in \{3, 5, 11, 17, 19\}$

- Αν $x = 3$, έχουμε $36 = y^2 \Rightarrow y = 6$
- Αν $x = 5$, έχουμε $64 = y^2 \Rightarrow y = 8$
- Αν $x = 11$, έχουμε $100 = y^2 \Rightarrow y = 10$

- Αν $x = 17$, έχουμε $64 = y^2 \Rightarrow y = 8$
- Αν $x = 19$, έχουμε $36 = y^2 \Rightarrow y = 6$

Συνεπώς $(x, y) \in \{(3, 6), (5, 8), (11, 10), (17, 8), (19, 6)\}$

Πρόβλημα 2: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(f(x) + y) = x + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι: (i) η f είναι «1-1»

$$(ii) f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(iii) η f είναι περιττή.

Λύση

(i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(x_1) + y = f(x_2) + y$$

$$f(f(x_1) + y) = f(f(x_2) + y)$$

$$x_1 + f(y) = x_2 + f(y)$$

$$x_1 = x_2$$

(ii) Στη δοσμένη σχέση θέτουμε όπου x το $f(x) \in \mathbb{R}$ και παίρνουμε

$$f(f(f(x)) + y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} : (1)$$

Στη δοσμένη θέτουμε $x = y = 0$ και παίρνουμε $f(f(0)) = f(0)$ και αφού η f είναι «1-1», προκύπτει πως $f(0) = 0$

Στη δοσμένη, τέλος, θέτουμε όπου $y = 0$ και παίρνουμε $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$

Συνεπώς από την (1) έχουμε ότι $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

(iii) Από το (ii) για $y = -x$ παίρνουμε

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow$$

$$0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Πρόβλημα 3: Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Γράφουμε τους κύκλους διαμέτρων AB και $\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Θ και H τα σημεία τομής των δυο κύκλων και M το μέσον του $B\Gamma$. Αν K και Λ είναι τα συμμετρικά του M ως προς Θ και H αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, A, Λ, Δ είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση

Προφανώς

$$\angle A\Theta B = \angle \Delta\Theta \Gamma = 90^\circ$$

Έστω B', Γ' τα συμμετρικά των B, Γ ως προς το Θ . Τότε

$$K\Gamma'M\Gamma \# \Rightarrow K\Gamma' \parallel M\Gamma$$

$$KB'MB \# \Rightarrow KB' \parallel MB$$

Επομένως

$$K\Gamma' \parallel KB' \parallel B\Gamma$$

Άρα το σημείο $K \in B'\Gamma'$ και το K είναι το μέσον του $B'\Gamma'$, δηλαδή,
 $KB' = K\Gamma'$. Επομένως

$$B'\Gamma' \parallel A\Delta$$

Συνεπώς το τετράπλευρο $B'\Gamma'A\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Όμως

Στο τρίγωνο $\Delta ABB'$ το $A\Theta$ είναι διάμεσος και ύψος $\Rightarrow AB' = AB$. Ομοίως

Στο τρίγωνο $\Delta \Gamma\Gamma'$ το $\Delta\Theta$ είναι διάμεσος και ύψος $\Rightarrow \Delta\Gamma' = \Delta\Gamma$

και αφού από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma = AB$, συμπεραίνουμε ότι $AB' = \Delta\Gamma'$.

Συνεπώς το τετράπλευρο $B'\Gamma'A\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άρα από την ισότητα των τριγώνων $\Delta K A \Gamma' = \Delta K \Delta B' \Rightarrow KA = K\Delta$.

Αν πάρουμε τα σημεία Γ'_1, B'_1 τα συμμετρικά των Γ, B ως προς το σημείο H αντίστοιχα, ομοίως αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma'_1 B'_1 \Delta$ είναι ορθογώνιο και επομένως $\Lambda A = \Lambda \Delta$.

Έστω T το μέσον του $A\Delta$. Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K A \Delta$, έχουμε

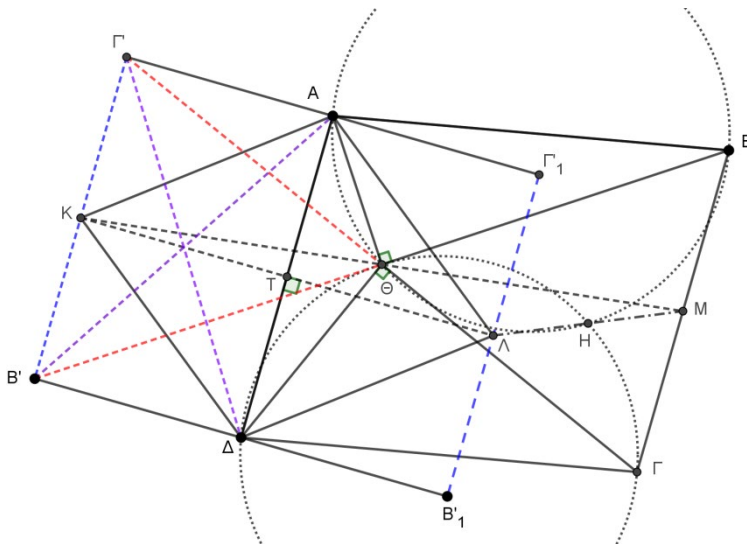
$$KT \perp A\Delta \Rightarrow KT \parallel B'\Delta \parallel \Gamma'A$$

Επίσης, από το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta \Lambda A \Delta$, έχουμε

$$\Lambda T \perp A\Delta \Rightarrow \Lambda T \parallel A\Gamma'_1 \parallel \Delta B'_1$$

Επομένως, αφού K, T, Λ συνευθειακά έπεται ότι Γ'_1, A, Γ' και B', Δ, B'_1 συνευθειακά. Άρα το τετράπλευρο $B'\Gamma'\Gamma'_1 B'_1$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο $\Delta K A \Lambda$ το AT είναι διάμεσος και ύψος, άρα $AK = \Lambda\Lambda$.

Επομένως το τετράπλευρο $K A \Lambda \Delta$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες και άρα είναι ρόμβος.



Πρόβλημα 4: Έστω $x_1, x_2, x_3, \dots$ μια ακολουθία ακεραίων τέτοια, ώστε

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+1} \leq 2n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Να αποδείξετε ότι κάθε θετικός ακέραιος k είναι ίσος με μια διαφορά της μορφής $x_j - x_i$ για κάποια i και j .

Λύση

Σταθεροποιούμε το k και θεωρούμε τους αρχικούς $k + 1$ όρους της ακολουθίας :

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} \leq 2k$$

Χωρίζουμε το σύνολο των δεικτών $\{1, 2, 3, \dots, 2k - 1, 2k\}$ σε ένωση υποσυνόλων

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k$$

όπου,

$$A_1 = \{1, k + 1\}, \quad A_2 = \{2, k + 2\}, \dots, A_{k-1} = \{k - 1, 2k - 1\}, A_k = \{k, 2k\}.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Dirichlet (περιστερονοφωλιάς), τουλάχιστον ένα από αυτά τα k σύνολα θα περιέχει κάποιους από τους δύο αριθμούς μεταξύ των αριθμών $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$, αφού έχουμε $k + 1$ αριθμούς και k σύνολα.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν δείκτες i, j με $1 \leq i < j \leq k + 1$ έτσι ώστε $x_i, x_j \in A_r$ για κάποιο r ($1 \leq r \leq k$). Αλλά αυτό ακριβώς σημαίνει ότι

$$x_i = r, \quad x_j = k + r$$

Επομένως, $x_j - x_i = k$.