



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$T = v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v, \quad v \in \mathbb{N}$$

είναι πολλαπλάσιο του 24.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 1:

Διαιρώντας το T με τον αριθμό 3 θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{T}{3} &= \frac{v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v}{3} = \frac{v^4 - 6v^3 + 24v^2 - v^2 - 18v}{3} = \frac{v^4 - v^2}{3} - 2v^3 + 8v^2 - 6v \\ &= v \frac{v(v-1)(v+1)}{3} - 2v^3 + 8v^2 - 6v \end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί v , $(v-1)$, $(v+1)$ είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι ένας θα διαιρείται με το 3.

Άρα $\frac{T}{3}$ είναι ακέραιος αριθμός και επομένως $3|T$ (1).

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{T}{8} &= \frac{v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v}{8} = \frac{v^4 - 8v^3 + 2v^3 + 24v^2 - v^2 - 16v - 2v}{8} \\ &= \frac{v^4 + 2v^3 - v^2 - 2v}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v = \frac{v^3(v+2) - v(v+2)}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v \\ &= \frac{(v+2)v(v-1)(v+1)}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v \end{aligned}$$

Ο αριθμός $(v+2)v(v-1)(v+1)$ είναι γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων αριθμών. Ένας από αυτούς του τέσσερις είναι πολλαπλάσιο του 4 και τουλάχιστον ένας είναι άρτιος αριθμός, δηλαδή πολλαπλάσιο του 2. Άρα ο αριθμός $(v+2)v(v-1)(v+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Δηλαδή ο $\frac{T}{8}$ είναι ακέραιος αριθμός και επομένως $8|T$ (2).

Επειδή $(3,8) = 1$ και από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $3 \cdot 8 = 24$ διαιρεί τον T .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 2:

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής.

Έστω $A_v = v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v$.

Για $v=1 \Rightarrow A_1 = 1 - 6 + 23 - 18 = 0 \Rightarrow 24 | A_1$

Έστω ότι $24 \mid A_k = k^4 - 6k^3 + 23k^2 - 18k$, τότε:

$$A_{k+1} = (k+1)^4 - 6(k+1)^3 + 23(k+1)^2 - 18(k+1) = \dots = k^4 - 2k^3 + 11k^2 + 14k$$

$$A_{k+1} - A_k = 4k^3 - 12k^2 + 32k \Rightarrow A_{k+1} = A_k + 4k^3 - 12k^2 + 32k$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $24 \mid 4k^3 - 12k^2 + 32k$.

$$4k^3 - 12k^2 + 32k = 4k(k^2 - 3k + 8) = 4k(k^2 - 3k + 2 + 6) = 4k(k-1)(k-2) + 24k \quad (1)$$

Επειδή μεταξύ 2 διαδοχικών ακεραίων ο ένα είναι άρτιος και μεταξύ 3 διαδοχικών ακεραίων ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 3 $\Rightarrow$ το σύνολο $\{k, k-1, k-2\}$ περιέχει τουλάχιστο ένα

πολλαπλάσιο του 2 και τουλάχιστο ένα πολλαπλάσιο του 3 $\Rightarrow$ Το γινόμενο $k(k-1)(k-2)$ είναι πολλαπλάσιο του 6 $\Rightarrow k(k-1)(k-2) = 6\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$ (2)

$$(1), (2) \Rightarrow 4k^3 - 12k^2 + 32k = 24\lambda + 24k = 24(\lambda + k) \Rightarrow 24 \mid 4k^3 - 12k^2 + 32k$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και έστω $AD, BE, \Gamma Z$ τα ύψη του με τα σημεία D, E, Z τα ίχνη των υψών πάνω στις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αν ονομάσουμε A, B, Γ τις γωνίες του τριγώνου να αποδείξετε ότι

$$(\alpha) \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = \varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma$$

$$(\beta) (AB)^2(AZ)(BZ) + (B\Gamma)^2(BD)(\Gamma D) + (A\Gamma)^2(\Gamma E)(EA) = 4E_{AB\Gamma}^2,$$

όπου $E_{AB\Gamma}$ να είναι το εμβαδόν του τριγώνου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

(α) Αφού A, B, Γ είναι γωνίες οξυγώνιου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ έχουμε ότι

$$\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi[\pi - (B + \Gamma)] = -\varepsilon\varphi(B + \Gamma) = -\frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma}{1 - \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma} \quad \text{ή}$$

$$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma = -\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi \Gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = \varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma$$

(β) Έχουμε ότι

$$E_{AB\Gamma} = \frac{AB \cdot \Gamma Z}{2} = \frac{B\Gamma \cdot AD}{2} = \frac{A\Gamma \cdot BE}{2}$$

Από αυτές τις ισότητες παίρνουμε

$$AB^2 = \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{\Gamma Z^2}, B\Gamma^2 = \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{AD^2}, A\Gamma^2 = \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{BE^2} \quad (\theta)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AZ\Gamma$ και $\triangle BZ\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα ότι

$$\varepsilon\varphi A = \frac{\Gamma Z}{AZ}, \quad \varepsilon\varphi B = \frac{\Gamma Z}{BZ}$$

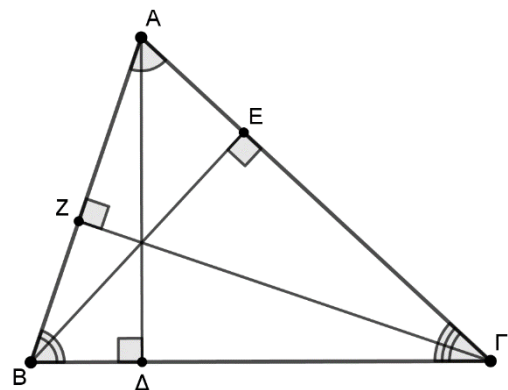
Πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B = \frac{\Gamma Z^2}{AZ \cdot BZ} \quad \text{ή} \quad (AZ)(BZ) = \frac{\Gamma Z^2}{\varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B} \quad (1)$$

Ομοίως θα πάρουμε

$$(B\Delta)(\Gamma D) = \frac{AD^2}{\varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma} \quad (2) \quad \text{και} \quad (\Gamma E)(EA) = \frac{BE^2}{\varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi \Gamma} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (θ) και τις (1), (2), (3) το πρώτο μέλος της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε γίνεται



$$(AB)^2(AZ)(BZ) + (BG)^2(B\Delta)(\Gamma\Delta) + (AG)^2(\Gamma E)(EA) = \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{\Gamma Z^2} \frac{\Gamma Z^2}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} + \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{A\Delta^2} \frac{A\Delta^2}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} + \frac{4E_{AB\Gamma}^2}{BE^2} \frac{BE^2}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi\Gamma} = 4E_{AB\Gamma}^2 \left(\frac{1}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} + \frac{1}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} + \frac{1}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi\Gamma} \right)$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} + \frac{1}{\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma} + \frac{1}{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi\Gamma} = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

που ισχύει από το (α). Επομένως

$$(AB)^2(AZ)(BZ) + (BG)^2(B\Delta)(\Gamma\Delta) + (AG)^2(\Gamma E)(EA) = 4E_{AB\Gamma}^2$$

Πρόβλημα 3

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και Δ σημείο της υποτείνουσας $B\Gamma$ ώστε το $A\Delta$ να είναι ύψος του τριγώνου. Αν E σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $BE = E\Gamma = \Gamma\Delta = 1$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Κατασκευάζουμε το κύκλο με κέντρο E και ακτίνα $E\Gamma = EB = 1$ και H το αντιδιαμετρικό του Γ . Τότε $\angle GBH = 90^\circ$ και επομένως $BH \parallel A\Delta$. Άρα από Θ.Θαλή

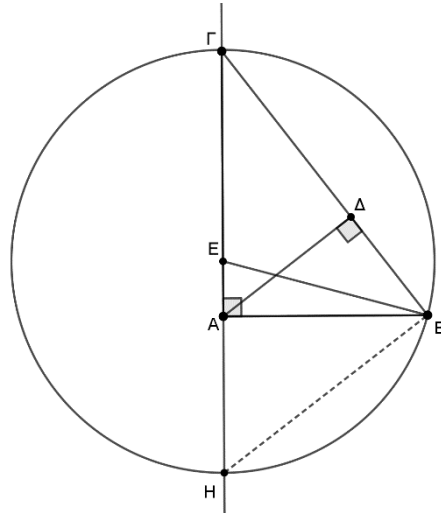
$$\frac{A\Gamma}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{BD} \Rightarrow A\Gamma = \frac{AH}{BD} = \frac{\Gamma H - A\Gamma}{B\Gamma - 1} = \frac{2 - A\Gamma}{B\Gamma - 1} \Rightarrow A\Gamma \cdot B\Gamma = 2 \Rightarrow B\Gamma = \frac{2}{A\Gamma} \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο $AB\Gamma$ και στο τρίγωνο AEB έχουμε

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = 1 - AE^2 + A\Gamma^2 \\ &= 1 - (A\Gamma - 1)^2 + A\Gamma^2 \\ &= 1 - A\Gamma^2 + 2A\Gamma - 1 + A\Gamma^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2)

$$\frac{4}{A\Gamma^2} = 2A\Gamma \Rightarrow A\Gamma = \sqrt[3]{2}$$



Πρόβλημα 4

Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση

$$\sqrt{7 + 6x - x^2} + \sqrt{7 + 12x - 2x^2} = x^2 - 6x + 18$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Το τριώνυμο $\varphi(x) = 7 + 6x - x^2$ αφού $\alpha = -1$ παίρνει μέγιστη τιμή για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \quad \text{η οποία είναι} \quad \varphi(3) = 7 + 6 \cdot 3 - 3^2 = 16.$$

Το τριώνυμο $\pi(x) = 7 + 12x - 2x^2$ αφού $\alpha = -2$ παίρνει μέγιστη τιμή για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-12}{2(-2)} = 3 \quad \text{η οποία είναι} \quad \pi(3) = 7 + 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 25.$$

Το τριώνυμο $\rho(x) = x^2 - 6x + 18$ αφού $\alpha = 1$ παίρνει ελάχιστη τιμή για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{η οποία είναι} \quad \rho(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 18 = 9.$$

Άρα:

$$\sqrt{7 + 6x - x^2} + \sqrt{7 + 12x - 2x^2} \leq \sqrt{16} + \sqrt{25} = 9 \leq x^2 - 6x + 18 \quad (1)$$

Η ισότητα στην ανίσωση (1) ισχύει μόνο για $x = 3$ και ως εκ τούτου η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση το $x = 3$.