



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2019

Ώρα Εξέτασης: 14:00-16:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

α) Αν για τους πραγματικούς α, β ισχύει $2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$, να αποδείξετε ότι $|2\beta - 1| < 1$

β) Να βρείτε το σύνολο των τιμών που παίρνει το β .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 1:

α) Ισχύει $\forall \alpha \in \mathbb{R}, -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \Rightarrow 0 \leq \alpha + |\alpha| \leq 2|\alpha|$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 2\beta(1 + |\alpha|) &= 1 + \alpha + |\alpha| \geq 1 \\ 2\beta &\geq \frac{1}{1 + |\alpha|} \\ 2\beta - 1 &\geq -1 + \frac{1}{1 + |\alpha|} > -1 \end{aligned}$$

Άρα $-1 < 2\beta - 1$ (1)

Επίσης,

$$\begin{aligned} 2\beta(1 + |\alpha|) &= 1 + \alpha + |\alpha| \leq 1 + 2|\alpha| \\ 2\beta &\leq \frac{1 + 2|\alpha|}{1 + |\alpha|} = 1 + \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} \\ 2\beta - 1 &\leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < 1 \end{aligned}$$

Άρα $2\beta - 1 < 1$ (2)

Από τις (1), (2) παίρνουμε $-1 < 2\beta - 1 < 1$ ή $|2\beta - 1| < 1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 2:

Η δεδομένη σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} 2\beta(1 + |\alpha|) &= 1 + \alpha + |\alpha| \\ (1 + |\alpha|)(2\beta - 1) &= \alpha \\ 2\beta - 1 &= \frac{\alpha}{1 + |\alpha|} \quad \text{ή} \quad |2\beta - 1| = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} \end{aligned}$$

Όμως προφανώς ισχύει

$$\frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < 1$$

Επομένως,

$$|2\beta - 1| < 1.$$

β) Θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} |2\beta - 1| &< 1 \\ -1 &< 2\beta - 1 < 1 \\ 0 &< 2\beta < 2 \quad \text{ή} \quad 0 < \beta < 1. \end{aligned}$$

Άρα, $\beta \in (0,1)$.

Όμως θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε τιμή του $\beta \in (0,1)$ υπάρχει α πραγματικός αριθμός που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$2\beta - 1 = \frac{\alpha}{1 + |\alpha|} \quad (3)$$

- Αν $\frac{1}{2} < \beta < 1$, θα έχουμε $2\beta - 1 > 0$ και από την (3) θα έχουμε $\alpha > 0$. Τότε από την (3) θα έχουμε

$$2\beta - 1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \Leftrightarrow 2\beta + 2\beta\alpha - 1 - \alpha = \alpha \Leftrightarrow 2\beta - 1 = 2\alpha - 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\beta - 1}{2 - 2\beta}$$

- Αν $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$, θα έχουμε $2\beta - 1 \leq 0$ και από την (3) θα έχουμε $\alpha \leq 0$. Τότε από την (3) θα έχουμε

$$2\beta - 1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \Leftrightarrow 2\beta - 2\beta\alpha - 1 + \alpha = \alpha \Leftrightarrow 2\beta - 1 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\beta - 1}{2\beta}$$

Άρα για κάθε $\beta \in (0,1)$ υπάρχει πραγματικός αριθμός α που ικανοποιεί την εξίσωση (3).

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι:

- i. $\sin 3\alpha = 4\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha$
- ii. $(4\sin^2 9^\circ - 3)(4\sin^2 27^\circ - 3) = \sin 9^\circ$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

- i. Θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \sin \alpha - \cos 2\alpha \cos \alpha = (2\sin^2 \alpha - 1)\sin \alpha - 2\cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &= 2\sin^3 \alpha - \sin \alpha - 2(1 - \sin^2 \alpha)\sin \alpha \\ &= 2\sin^3 \alpha - \sin \alpha - 2\sin \alpha + 2\sin^3 \alpha = 4\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha. \end{aligned}$$

- ii. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης

$$\sin 3\alpha = 4\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha$$

θα πάρουμε

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 4\sin^2 \alpha - 3 \quad (1)$$

Από την τελευταία ισότητα για $\alpha = 9^\circ$ και $\alpha = 27^\circ$ θα πάρουμε

$$\frac{\sin 27^\circ}{\sin 9^\circ} = 4\sin^2 9^\circ - 3 \quad \text{και} \quad \frac{\sin 81^\circ}{\sin 27^\circ} = 4\sin^2 27^\circ - 3$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} (4\sin^2 9^\circ - 3)(4\sin^2 27^\circ - 3) &= \frac{\sin 27^\circ}{\sin 9^\circ} \cdot \frac{\sin 81^\circ}{\sin 27^\circ} = \frac{\sin 81^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 9^\circ)}{\sin 9^\circ} = \\ &= \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} = \cot 9^\circ. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

β) Να υπολογίστε το άθροισμα:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 1999^3$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

α) Ο δεδομένος τύπος είναι αληθής για $n = 1$, αφού

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Αποδεικνύουμε ότι: αν η πρόταση είναι αληθής για $n = k$, όπου k κάποιος θετικός ακέραιος $k \geq 1$, τότε η πρόταση είναι αληθής και για $n = k + 1$.

Δηλαδή δεχόμαστε ότι ισχύει

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (1)$$

και θα αποδείξουμε ότι :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad (2)$$

➤ Το πρώτο μέλος της (2) λόγω της (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Επομένως, η πρόταση είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

β) Ξέρουμε από το (α) ότι

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1000^3 = \frac{1000^2(1000+1)^2}{4} = \left(\frac{1000 \cdot 1001}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3) με 2^3 θα έχουμε

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 2000^3 = 2^3 \left(\frac{1000 \cdot 1001}{2}\right)^2 \quad (4)$$

Επίσης από το (α) ισχύει

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3 = \frac{2000^2(2000+1)^2}{4} = \left(\frac{2000 \cdot 2001}{2}\right)^2 \quad (5)$$

Επομένως, αφαιρώντας την (4) από την (5) έχουμε

$$\begin{aligned} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3) - (2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 2000^3) \\ = \left(\frac{2000 \cdot 2001}{2}\right)^2 - 2^3 \left(\frac{1000 \cdot 1001}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 1999^3 &= \left(\frac{2000 \cdot 2001}{2} \right)^2 - 8 \frac{(1000 \cdot 1001)^2}{4} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 1000^2 \cdot 2001^2}{4} - 2 \cdot 1000^2 \cdot 1001^2 \\
 &= 1000^2(2001^2 - 2 \cdot 1001^2) \quad (6).
 \end{aligned}$$

Η παράσταση μέσα στην παρένθεση γράφεται

$$\begin{aligned}
 2001^2 - 2 \cdot 1001^2 &= (2 \cdot 1000 + 1)^2 - 2(1000 + 1)^2 \\
 &= 4 \cdot 1000^2 + 4 \cdot 1000 + 1 - 2 \cdot 1000^2 - 4 \cdot 1000 - 2 = 2 \cdot 1000^2 - 1 \\
 &= 2000000 - 1 = 1999999
 \end{aligned}$$

Άρα, η (6) γίνεται

$$\begin{aligned}
 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 1999^3 &= 1000^2(2001^2 - 2 \cdot 1001^2) = 1000^2 \cdot 1999999 \\
 &= 1999999000000.
 \end{aligned}$$

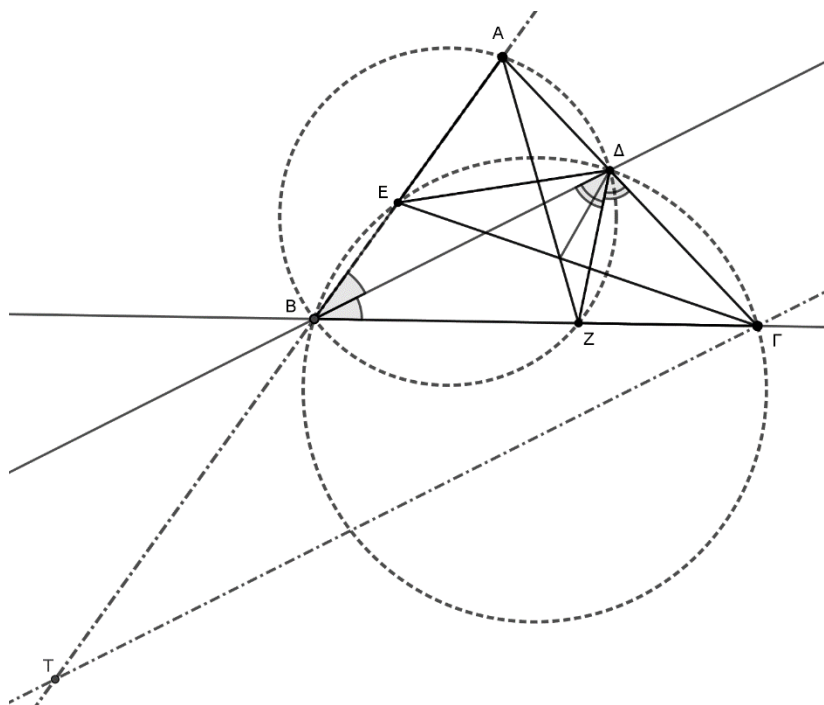
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle B$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle B\Delta\Gamma$ τέμνει την ευθεία AB ξανά στο σημείο E και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle A\Delta\Gamma$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ ξανά στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- i. $(A\Delta)(B\Gamma) = (AB)(\Gamma\Delta)$
- ii. Τα ευθύγραμμα τμήματα AE και ΓZ είναι ίσα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

i.



Φέρουμε από την κορυφή Γ παράλληλη προς την διχοτόμο BD που τέμνει την ευθεία AB στο σημείο T . Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο $\triangle AT\Gamma$ θα έχουμε

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AT}{BT} \quad (1)$$

Όμως λόγω της παραλληλίας το τρίγωνο $\triangle BT\Gamma$ είναι ισοσκελές, δηλαδή $BT = AT$. Άρα η (1) γίνεται

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AT}{BT} \quad \text{ή} \quad AD \cdot BT = AB \cdot AT \quad (2)$$

ii. Παίρνοντας την δύναμη του σημείου A ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle B\Delta\Gamma$ θα έχουμε

$$AE \cdot AB = AD \cdot A\Gamma \quad \text{ή} \quad AE = \frac{AD \cdot A\Gamma}{AB} \quad (3)$$

Επίσης, παίρνοντας την δύναμη του σημείου Γ ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle AB\Delta$ θα έχουμε

$$\Gamma Z \cdot \Gamma B = \Gamma\Delta \cdot A\Gamma \quad \text{ή} \quad \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta \cdot A\Gamma}{B\Gamma} \quad (4)$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{AD \cdot A\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma\Delta \cdot A\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$$

που λόγω της (2) ισχύει. Άρα $AE = \Gamma Z$.