**: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

1.Με χρήση του ορισμού, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: 

Λύση

Η συνάρτηση  με  είναι συνεχής στο  .

Θεωρούμε τη διαμέριση  του  με

κοινό πλάτος διαστημάτων .

Τα διαιρετικά σημεία της  :





2.Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α.  β. 

γ.  δ. 

ε.  στ. 

ζ.  η.  

θ.  ι.  

ια.  ιβ. 

ιγ.  ιδ. 

ιε.  ιστ. 

3**.**Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  ή με

οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε την τιμή του

ολοκληρώματος :  .

4. α)Αν η συνάρτηση  είναι συνεχής στο διάστημα , με χρήση της

αντικατάστασης  ,να αποδείξετε, ότι :



β)Με τη βοήθεια του παραπάνω συμπεράσματος ,να υπολογίσετε

**τ**ο ολοκλήρωμα 

5**.** Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  ,να αποδείξετε ότι

 ,όπου  .

6**.** Αν η γραφική παράσταση της  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα

σημεία  και  και η  είναι συνεχής στο διάστημα ,να

δείξετε ότι  .

**7.**α) Να δείξετε ότι : 

όπου 

β) Θέτοντας  να δείξετε ότι : 

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα  .

**8.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση 

είναι σταθερή και να υπολογίσετε το  .

**9.** Δίνονται οι συναρτήσεις **** με

 και  ,  .

Να αποδείξετε ότι : α) 

β)  .

**10.** Αν  ,να αποδείξετε ότι :

a) 

β)  .

**11**. Αν  ,να αποδείξετε ότι

 και να υπολογίσετε το  .

**12.** Έστω  συνεχής συνάρτηση με  και .

Να υπολογίσετε το όριο  .

**13.** Αν η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη ,να αποδείξετε ότι



**14.** Έστω μια συνάρτηση  με  συνεχή ,για την οποία ισχύει

 και  .

Να υπολογίσετε το  .

**15.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  είναι

σταθερή.

**16.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου ,που περικλείεται

απότις γραμμές

α) 

β) 

γ) 

δ) 

ε) 

στ) 

ζ) 

η) 

θ) 

ι) 

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  με .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ,που ορίζεται από τα

σημεία  με .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση  .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν  του χωρίου ,που περικλείεται

από τη γραφική παράσταση της ,την πλάγια ασύμπτωτή της

και τις ευθείες .

Τέλος να υπολογίσετε το .

**19.** Δίνεται η συνάρτηση .

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που προκύπτει αν :

α) το χωρίο που περικλείεται από την  και τις ευθείες

 στραφεί πλήρως γύρω από τον x-άξονα

β) το χωρίο που περικλείεται από την  και τις ευθείες

 στραφεί πλήρως γύρω από τον y-άξονα .

**20.** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που προκύπτει από

την πλήρη περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου

που περικλείεται από τους άξονες και τη γραμμή .

**21.** Η « θηλιά » που ορίζεται από την καμπύλη 

περιστρέφεται κατά π γύρω από τον x –άξονα .

Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

**22.** Οι καμπύλες με  και ο x-άξονας

ορίζουν το επίπεδο χωρίο Α .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του Α

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που δημιουργείται

όταν το χωρίο Α στραφεί πλήρως γύρω από τον x-άξονα .

**θεωρητικές ασκήσεις**

**23.** Αν η συνάρτηση έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο **** στο και

**** να δείξετε ότι ** .**

**24.** Αν η συνάρτηση  είναι συνεχής να δείξετε ότι:

****

**25.** Δίνεται η συνάρτηση ορισμένηστο και συνεχής

στο

ι) Να δείξετε ότι : 

ιι) Να υπολογίσετε το ****

**26.** Αν η συνάρτηση έχει συνεχή παράγωγο  και η γραφική της

παράσταση  περνά από τα σημεία Α(1,1) και Β(2,0), να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα 

**27**. Aν η συνάρτηση έχει συνεχή παράγωγο στο  και είναι

τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση 

να υπολογίσετε το

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

2. α)  β)  γ)  δ)  ε) 

στ)  ζ)  η) θ)  ι)  ια) 

ιβ)  ιγ)  ιδ)  ιε) 

ιστ) 

3.  4β.  7γ.  8.  11. 

12. 3 14. 

16. α)  β)  γ)  δ)  ε)  στ)  ζ) 

η)  θ)  ι) 

17.  18.  19.  20.  21. 

22. α)  , β) 

25. ιι) 26. 27.