**: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

1.Με χρήση του ορισμού, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: 

Λύση

 Η συνάρτηση  με  είναι συνεχής στο  .

 Θεωρούμε τη διαμέριση  του  με

 κοινό πλάτος διαστημάτων .

 Τα διαιρετικά σημεία της  :

 

 

2.Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

 α.  β. 

 γ.  δ. 

 ε.  στ. 

 ζ.  η.  

 θ.  ι.  

 ια.  ιβ. 

 ιγ.  ιδ. 

 ιε.  ιστ. 

3**.**Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  ή με

 οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε την τιμή του

 ολοκληρώματος :  .

4. α)Αν η συνάρτηση  είναι συνεχής στο διάστημα , με χρήση της

αντικατάστασης  ,να αποδείξετε, ότι :

 

 β)Με τη βοήθεια του παραπάνω συμπεράσματος ,να υπολογίσετε

 **τ**ο ολοκλήρωμα 

 5**.** Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  ,να αποδείξετε ότι

  ,όπου  .

 6**.** Αν η γραφική παράσταση της  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα

 σημεία  και  και η  είναι συνεχής στο διάστημα $\left[5, 8\right]$,να

 δείξετε ότι  .

 **7.**α) Να δείξετε ότι : 

 όπου 

 β) Θέτοντας  να δείξετε ότι : 

 γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το

 ολοκλήρωμα  .

 **8.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση 

 είναι σταθερή και να υπολογίσετε το  .

**9.** Δίνονται οι συναρτήσεις **** με

  και  ,  .

 Να αποδείξετε ότι : α) 

 β)  .

**10.** Αν  ,να αποδείξετε ότι :

 a) 

 β)  .

**11**. Αν  ,να αποδείξετε ότι

  και να υπολογίσετε το  .

 **12.** Έστω  συνεχής συνάρτηση με  και .

 Να υπολογίσετε το όριο  .

**13.** Αν η συνάρτηση  είναι παραγωγίσιμη ,να αποδείξετε ότι

 

**14.** Έστω μια συνάρτηση  με  συνεχή ,για την οποία ισχύει

  και  .

 Να υπολογίσετε το  .

**15.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  είναι

 σταθερή.

**16.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου ,που περικλείεται

 απότις γραμμές

 α) 

 β) 

 γ) 

 δ) 

 ε) 

 στ) 

 ζ) 

 η) 

 θ) 

 ι) 

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  με .

 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ,που ορίζεται από τα

 σημεία  με .

**18.** Δίνεται η συνάρτηση  .

 Να υπολογίσετε το εμβαδόν  του χωρίου ,που περικλείεται

 από τη γραφική παράσταση της ,την πλάγια ασύμπτωτή της

 και τις ευθείες .

 Τέλος να υπολογίσετε το .

**19.** Δίνεται η συνάρτηση .

 Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που προκύπτει αν :

 α) το χωρίο που περικλείεται από την  και τις ευθείες

  στραφεί πλήρως γύρω από τον x-άξονα

 β) το χωρίο που περικλείεται από την  και τις ευθείες

  στραφεί πλήρως γύρω από τον y-άξονα .

 **20.** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που προκύπτει από

 την πλήρη περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου

 που περικλείεται από τους άξονες και τη γραμμή .

 **21.** Η « θηλιά » που ορίζεται από την καμπύλη 

 περιστρέφεται κατά π γύρω από τον x –άξονα .

 Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

 **22.** Οι καμπύλες με  και ο x-άξονας

 ορίζουν το επίπεδο χωρίο Α .

 α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του Α

 β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού ,που δημιουργείται

 όταν το χωρίο Α στραφεί πλήρως γύρω από τον x-άξονα .

**θεωρητικές ασκήσεις**

**23.** Αν η συνάρτηση έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο **** στο και

 **** να δείξετε ότι ** .**

**24.** Αν η συνάρτηση  είναι συνεχής να δείξετε ότι:

 ****

**25.** Δίνεται η συνάρτηση ορισμένηστο και συνεχής

 στο

 ι) Να δείξετε ότι : 

 ιι) Να υπολογίσετε το ****

**26.** Αν η συνάρτηση έχει συνεχή παράγωγο  και η γραφική της

 παράσταση  περνά από τα σημεία Α(1,1) και Β(2,0), να υπολογίσετε

 το ολοκλήρωμα 

**27**. Aν η συνάρτηση έχει συνεχή παράγωγο στο  και είναι

 τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση 

 να υπολογίσετε το $f\left(π\right)$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

2. α)  β)  γ)  δ)  ε) 

 στ)  ζ)  η) θ)  ι)  ια) 

 ιβ)  ιγ)  ιδ)  ιε) 

 ιστ) 

 3.  4β.  7γ.  8.  11. 

 12. 3 14. 

 16. α)  β)  γ)  δ)  ε)  στ)  ζ) 

 η)  θ)  ι) 

 17.  18.  19.  20.  21. 

 22. α)  , β) 

 25. ιι) $I=1$ 26. $I=-e$ 27. $f\left(π\right)=2$