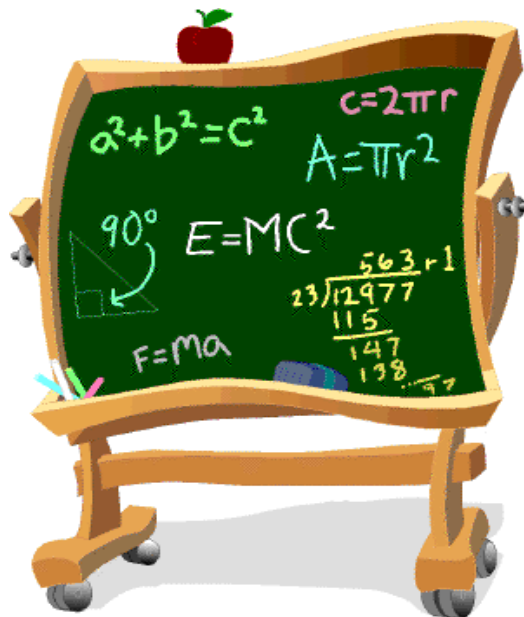




ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΥΛΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

- Τυπολόγιο
- Ασκήσεις Επανάληψης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΙΑΙΕΣ ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2}{v}} \quad \text{ή} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v f_i x_i^2}{v} - \bar{x}^2}, \quad \text{όπου } v = \sum_{i=1}^v f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - v\bar{x}\bar{y}}{vS_x S_y}, \quad \text{όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_v y_v$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B, \quad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta), \quad 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta), \quad \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}, \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

3. Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x=360^0\kappa+\alpha$ ή $x=360^0\kappa+180-\alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$	$x=2\pi\kappa+\alpha$ ή $x=2\pi\kappa+\pi-\alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x=360^0\kappa \pm \alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$	$x=2\pi\kappa \pm \alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x=180^0\kappa+\alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$	$x=\pi\kappa+\alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

4. Στερεομετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\Pi} = \Pi_{\beta} \cdot \nu$	$V = E_{\beta} \cdot \nu$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\Pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \nu}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \nu$	$V = \pi R^2 \nu$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \nu}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \nu}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

5. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$.

Εστίες: $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες: $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$.

6. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' , \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x , \quad (\sigma \nu \eta x)' = -\eta \mu x , \quad (\varepsilon \phi x)' = \tau \varepsilon \mu^2 x , \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. Ολοκληρώματα

$$\int \tau \varepsilon \mu x dx = \ln |\tau \varepsilon \mu x + \varepsilon \phi x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu \frac{x}{\alpha} + c$$

$$\int \sigma \tau \varepsilon \mu x dx = \ln \left| \varepsilon \phi \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau \omicron \xi \varepsilon \phi \frac{x}{\alpha} + c$$

8. Απλός τόκος

$$T = \frac{KEX}{100}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2 + 3}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - e^x \cdot \varepsilon \varphi x}{3 \cdot \ln(x+1)}$$

$$(\varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} (5x - \ln x - e^x)$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x - e^x}{2e^x - \ln x}$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$(\eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \eta \mu x + \eta \mu^2 x}{x - x \sigma \nu \nu x}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot \sigma \nu \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$

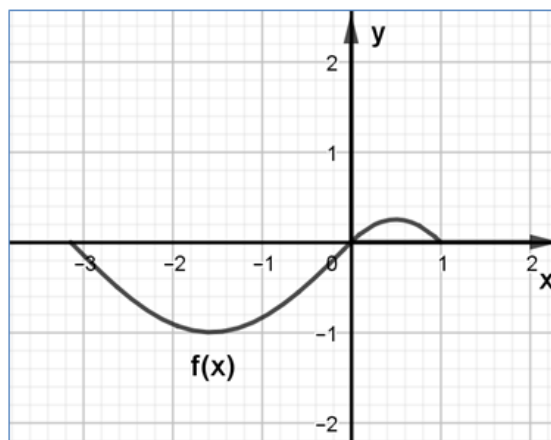
β) Υπάρχει $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $\sigma \phi \xi = \xi$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-\pi, 1]$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του $\xi \in (-\pi, 1)$ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος.

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το διτλανό γράφημα για να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος. Να εξηγήσετε.



4. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle και να γράψετε τη γεωμετρική σημασία του.

β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x < 1 \\ 8x - 2x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-3, 3]$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + 9x^2 + 12x + \alpha = 0$, $4 < \alpha < 5$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-2, -1)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ διάστημα και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f(2) - f(1) = 3$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.
7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [4, 9] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \leq \frac{3f(4) + 4f(6) + 7f(9)}{14} \leq \beta$, όπου α είναι η ελάχιστη και β η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha\beta < 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.
9. (α) Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού.
(β) Να βρείτε κατάλληλο $\xi \in (5, 10)$ για το οποίο ισχύει το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [5, 10]$.
10. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x - x$. Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (1, e)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος της μέσης τιμής και να δείξετε ότι $1 < e^{\frac{1}{e-1}} < e$.
(β) Χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, να δείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.
11. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$. Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
(α) Να δείξετε ότι έχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο στο σημείο $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$.
(β) Να δείξετε ότι $e^{x^2} \geq x^{2e}$, $\forall x \in (0, \infty)$.
(γ) Αν $0 < \kappa < \lambda < \sqrt{e}$, να δείξετε ότι $\kappa^{-\lambda^2} < \lambda^{-\kappa^2}$.
13. (α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^4 + 4\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.
(β) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $[f(x)]^3 + [f'(x)]^2 + 8f(x) = 3e^{-x} - 4e^{2x} - 5x + 3$. Να αποδείξετε ότι δεν έχει τοπικά ακρότατα.

14. (α) Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης και οριζόντιας ασύμπτωτης

(β) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των πιά κάτω συναρτήσεων:

$$(i) y = \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$(ii) y = \frac{x^2 - 4x - 5}{2x - 5}$$

$$(iii) y = \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$$

$$(iv) y = \frac{\ln(x-1)}{x-3}$$

$$(v) y = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$$

$$(vi) y = \frac{\ln(2-x)}{1-e^{-x}}$$

15. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονotonίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$(α) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(β) y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

$$(γ) y = (1-x)^2 \cdot e^{-x}.$$

16. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονotonίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα κυρτότητας, **τα σημεία καμπής** και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τη γραφική

παρασάσταση της συνάρτησης:
$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x}.$$

17. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων: (α) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 2}$ β) $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}.$

18. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ , αν γνωρίζουμε ότι ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\kappa f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1.$

19. συνάρτηση $y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \lambda}$ έχει ακρότατο στο $(1, -1)$ και πλάγια ασύμπτωτη την

$$y = 2x + 1. \text{ Να βρείτε τις τιμές των } \alpha, \beta, \gamma, \lambda.$$

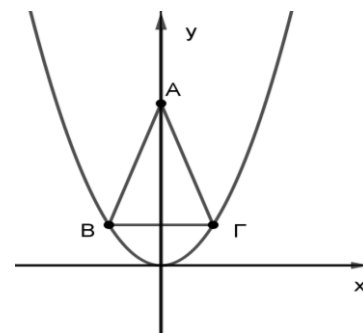
20. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και το σημείο $A(0, 12)$.

Κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, $(AB) = (A\Gamma)$ όπου οι κορυφές

B και Γ είναι σημεία της παραβολής και η πλευρά $B\Gamma$ παράλληλη

με τον άξονα x . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ

ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να γίνεται ελάχιστο.



21. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ=8cm και ύψος ΑΔ=6cm. Εγγράφουμε σ' αυτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο.
22. Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$. Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + \ln f(x) = 1 + x^2$ να δείξετε ότι :
- (α) Για $x = 0$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο. (β) Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα πάνω $\forall x \in \mathbb{R}$.
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{e} \leq x \leq e$. Να βρείτε το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.
24. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $2f(4) = f(2) + f(6)$. Να δείξετε ότι η f' δεν είναι 1-1 συνάρτηση και ότι η $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση.
25. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow (0, \infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη.
- (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, αν και μόνον αν, ισχύει:
- $$f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$$
- (β) Να βρείτε το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση στρέφει $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ τα κοίλα προς τα πάνω.
26. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που πρέπει να εγγραφεί σε ημικύκλιο ακτίνας R, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.
27. Να υπολογίσετε το μήκος του τετραγώνου που πρέπει να αποκόψουμε από τις τέσσερις γωνίες ενός ορθογώνιου χαρτονιού διαστάσεων 30 επί 20, ώστε να σχηματίσουμε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον μέγιστο δυνατό όγκο.
28. Σε κώνο με ακτίνα 6 και ύψος 15 εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε:
- (α) ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος
(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου να είναι μέγιστο.
29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 9$, $-3 < x < 3$. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει τις δύο κορυφές του στον άξονα των τετμημένων και τις άλλες δύο πάνω στην γραφική παράσταση της f , ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.

Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο που ανήκει στην καμπύλη $y = \frac{1}{8}x^2$ από το σημείο (2, 4).

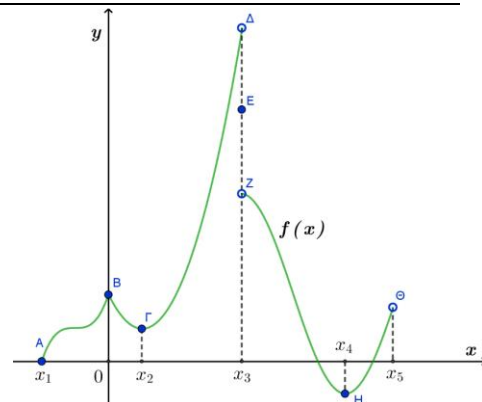
30. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

(β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [x_1, x_5] \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(ii) Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων

της f και να τα χαρακτηρίσετε.



31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,1)$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x^3) = 4f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$ και $f(8) = f(2)$

(β) υπάρχουν σημεία $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,8)$ ώστε οι εφαπτομένες της G_f στα σημεία της με τετμημένες ξ_1 και ξ_2 να είναι παράλληλες.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f .

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x} < e^{\frac{x-1}{x+1}}$, $x > 0$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha\beta < 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

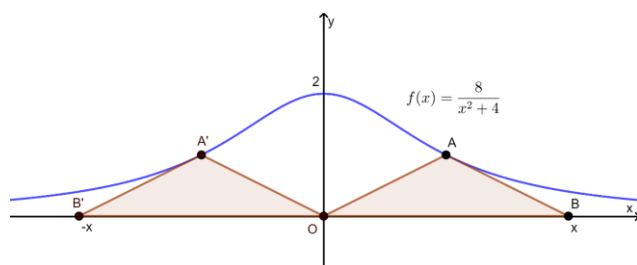
35. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων. Έστω A, A' σημεία της γραφικής παράστασης της f .

(α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } E(x) = \frac{32x}{x^2 + 16}$$

(β) Να βρείτε τις θέσεις των σημείων B και B' , έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ να παίρνει τη μέγιστη τιμή.



36. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία είναι κυρτή, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f''(x) > 4[f'(x) - f(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίσετε τις ποσότητες :

$$(\alpha) \text{ τοξσυν}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(\beta) \text{ τοξεφ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(\gamma) \text{ εφ}\left[\text{τοξημ}\frac{3}{5}\right].$$

$$(\delta) \text{ ημ}\left(\text{τοξεφ}\frac{3}{4}\right)$$

$$(\epsilon) \text{ συν}\left(2\text{τοξσφ}\frac{12}{5}\right)$$

$$(\sigma\tau) \text{ συν}\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\frac{7}{24}\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι : $(\text{τοξσυν}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

3. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω:

$$\text{i)} \quad y = \text{τοξημ}(2x-1)$$

$$\text{ii)} \quad y = \ln(\text{τοξημ} 2x)$$

$$\text{iii)} \quad y = \text{τοξσυν}(e^{x+1})$$

$$\text{iv)} \quad y = \sqrt{1-x^2} - x \cdot \text{τοξσυν}x$$

4. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $y = \text{τοξεφ}x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

5.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = 2\text{τοξσυν}(3x-2)$.

7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x$ $-1 \leq x \leq 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{τοξεφ}x}{2x^3}$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \text{τοξημ}x}{\eta\mu x}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + x}{\text{τοξσυν}x - \frac{\pi}{2}}$$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**Ομάδα Α**

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \left(x^2 - e^{3x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6} \right) dx$$

$$\beta) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\gamma) \int \frac{dx}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$$

$$\delta) \int \eta \mu^6 x \cdot \sigma \nu \nu x dx$$

$$\varepsilon) \int [9e^{6-3x} - 4\tau \varepsilon \mu^2 (5x+4)] dx$$

$$\sigma \tau) \int 4x \ln \sqrt{x-1} dx$$

$$\zeta) \int \frac{x-2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad x=2\eta \mu \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\eta) \int x^2 e^{x^2} \sigma \nu \nu (e^{x^2}) dx$$

$$\theta) \int \frac{2x^3+1}{x^4+x^2} dx$$

$$\iota) \int \frac{x \tau \omicron \xi \eta \mu x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\kappa) \int \frac{3-x}{x^2+3x} dx$$

$$\lambda) \int \frac{x-3}{x^2+16} dx$$

$$\mu) \int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2-2}} dx, \quad x = \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi \theta \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\nu) \int \frac{dx}{3+2\sigma \nu \nu 2x - \eta \mu 2x}$$

$$\xi) \int \frac{dx}{1 + \eta \mu x - \sigma \nu \nu x} dx$$

$$\omicron) \int x e^{x^2+1} dx$$

$$\pi) \int \frac{\sigma \nu \nu^3 x}{1 - \eta \mu x} dx$$

$$\rho) \int e^x \cdot \sigma \nu \nu 2x dx$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}, \quad x > 0, \quad u = \sqrt{2x+1}$$

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, \quad x = \sigma \nu \nu 2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

2. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ , να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx. \quad \text{Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα: } \int e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x) dx.$$

3. Αν $A = \int \frac{\sigma \nu \nu x}{1+2\eta \mu x} dx$ και $B = \int \frac{\eta \mu 2x}{1+2\eta \mu x} dx$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα A , $A+B$ και B .

4. Αν $f''(x) = \frac{1-f'(x)}{x}$, $x > 0$ και $f(1) = f'(1) = 0$ να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$.

5. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$ στο $(0, \infty)$ αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι: $e^{f(x)} - 4x^3 = x[6x - e^{f(x)} f'(x)]$ και $f(1) = \ln 3$.

6. Με τον μετασχηματισμό $x = \alpha \sin^2 \theta + \beta \mu^2 \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τα ολοκληρώματα της μορφής $\int f(\sqrt{x-\alpha}, \sqrt{\beta-x}) dx$ ανάγονται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int F(\eta \mu \theta, \sin \theta) d\theta$.

Να επιλέξετε κατάλληλα τα α , β και να δείξετε ότι: $\int \sqrt{\frac{x-7}{11-x}} dx = 4 \left(\theta - \frac{\eta \mu 2\theta}{2} \right) + c$.

Ομάδα Β

1. Αν $I_v = \int x^v \eta \mu x dx$, $v \geq 3$ να δείξετε ότι $I_v = -\sin x \cdot x^v + v x^{v-1} \eta \mu x - v(v-1)I_{v-2}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε: $\int x^3 \eta \mu x dx$.
2. Αν $I_v = \int x (\ln x)^v dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $\forall v \geq 2$ ισχύει: $I_v = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^v - \frac{v}{2} I_{v-1}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε $\int x (\ln x)^3 dx$.
3. Αν $I_v = \int e^{\varphi^v x} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι $I_v = \frac{e^{\varphi^{v-1} x}}{v-1} - I_{v-2}$, $\forall v \geq 2$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_6 .
4. Αν $I_v = \int x^v e^{-2x} dx$, $v \in \mathbb{N}^*$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα ολοκληρώματα I_v και I_{v-1} για $v \geq 2$.
5. Αν $I_v = \int \sin^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι $v I_v = \sin^{v-1} x \cdot \eta \mu x + (v-1) I_{v-2}$, $\forall v \geq 2$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_6 .
6. Αν $I_v = \int \frac{x^v dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $v \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι: $v I_v = x^{v-1} \cdot \sqrt{1+x^2} - (v-1) I_{v-2}$, $\forall v \geq 2$.
7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e^2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.
8. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \cdot f'(x) e^{f^2(x)} = e^{2x}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $y = f(x)$.
9. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, όταν η C_f δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ με κλίση $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, e+1)$.

10. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, όταν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$x f'(x) + x = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = \ln 3.$$

11. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $2xf(x) + x^2 f'(x) = \sin x - f'(x)$ και $f(0) = 1$.

12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(3) = 7$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ικανοποιεί τη

$$\text{σχέση } f'(x) = \frac{2+f(x)}{x}. \text{ Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης } f.$$

13. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (3x^2 + 2)e^{-f(x)}$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{7}{6}$.

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1) = 1$ και $xf'(x) - f(x) = x \ln^2 x$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της.

15. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f'(x) = \frac{2+f(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 6$.
Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f .

16. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 4$ και επιπλέον:

$$e^{x^2} f'(x) + 5 = 2x \left[1 - e^{x^2} f(x) \right]$$

17. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x + \frac{1}{x} = t$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το

$$\text{ολοκλήρωμα } \int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^4 + 3x^2 + 1) \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)}, \quad x \neq 0.$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

(α) $\int_1^e \ln x dx$

(β) $\int_0^1 \frac{5x}{(x+2)(x^2+1)} dx$

(γ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \eta\mu\theta$

2. Αν
- $\int_1^a (3x^2 - 2x) dx = 2a^2$
- με
- $a > 0$
- να βρείτε την τιμή του
- a
- .

3. Αν η συνάρτηση
- f
- είναι συνεχής στο διάστημα
- $[0, 2\pi]$
- να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx \quad \text{και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα} \quad \int_0^{2\pi} x \sin^3 x dx.$$

4. Αν η συνάρτηση
- f
- είναι συνεχής στο
- $\mathbb{R}$
- , χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό
- $u = \pi - x$
- , να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x \eta\mu^3 x}{1 + \sin^2 x} dx.$

5. Η συνάρτηση
- $y = f(x)$
- είναι συνεχής στο
- $[0, a]$
- . Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό
- $t = a - x$
- να δείξετε ότι

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}. \quad \text{Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^5 x}{\eta\mu^5 x + \sin^5 x} dx.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση
- $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$
- με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο
- $x_0 = 2$
- και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο
- $A(0, 1)$
- .

Αν ισχύει $\int_0^2 [xf''(x) + 3f'(x)] dx = 6$ να αποδείξετε ότι:

(α) $f(2) = 4$

(β) υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \frac{3}{2}$

7. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες
- $y = -x^2 + 6x + 9$
- και
- $y = 2x^2$
- .

8. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο A τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο B.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η $yt - x = t^2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

(β) Αν T είναι το χωρίο που ορίζεται από την παραβολή και τις OB, AB να υπολογίσετε το εμβαδόν του T, $E(t)$.

(γ) Αν $E(t) = \frac{1}{6} \tau.μ.$, να δείξετε ότι $t=1$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B.

(δ) Να βρείτε τον όγκο V_x που γράφει το χωρίο T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(ε) Να βρείτε τον όγκο V_y που γράφει το χωρίο T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(ζ) Να δείξετε ότι $\frac{V_x}{V_y} = 5$.

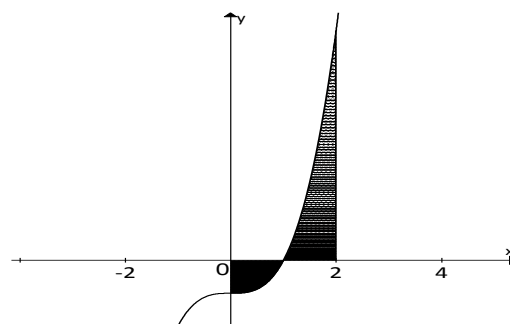
(η) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο T κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$.

(θ) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο T κάνει πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x = 1$.

9. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$, την ευθεία $y = e$ και τον άξονα y χωρίζεται από την ευθεία $y = \lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, σε δύο ισομβαδικά μέρη. Να υπολογίσετε την τιμή του λ .

10. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_5^9 x\sqrt{9-x} dx$, $\sqrt{9-x} = u$.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



12. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = 3x^2$ και την ευθεία $\psi = 3$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $\psi = 3$.

13. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2e^x$, $g(x) = e^{2x}$ και τον άξονα των ψ .

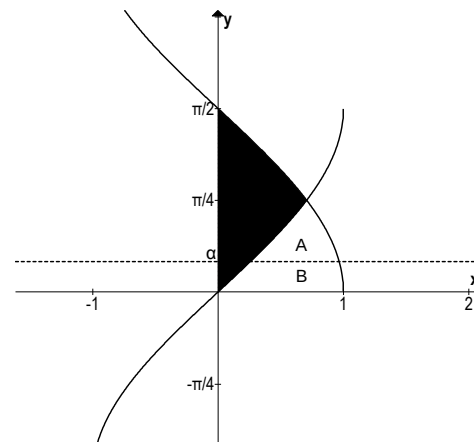
14. Να βρείτε τον όγκο που παράγει το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = -x^2 + 2x$ την ευθεία $\psi = x$ και τον άξονα των x όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον Ox .

15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \text{Τοξημ}x$ και $g(x) = \text{Τοξσυν}x$ και μία ευθεία $y = \alpha$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.

(β) Την τιμή του α ώστε οι όγκοι που παράγουν τα χωρία Α και Β όταν περιστραφούν πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων να είναι ίσοι.

(Το Α περικλείεται από τις f , g και την $y = \alpha$. Το Β περικλείεται από τις f , g , την $y = \alpha$ και τον άξονα των τεταγμένων)



16. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια περιττή συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

(α) Να αποδείξετε ότι: (i) $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$ (ii) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{100} (\sin x + 1) dx.$$

17. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2$.

Αν $f(\pi) = 1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

18. Έστω οι συναρτήσεις f, g , με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) \cdot g''(x) - f''(x) \cdot g(x)] dx = g'(\beta) \cdot (f(\beta) - g(\beta)).$$

19. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} 6x dx = 3(\beta - \alpha)$.

20. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = -\frac{4}{3}$.

ΣΕΙΡΕΣ

1. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πιο κάτω σειρών:

$$(\alpha) \sum_{v=1}^{\kappa} (\kappa + 2)(\kappa + 6)$$

$$(\beta) \sum_{v=1}^{\kappa} 2\kappa(\kappa + 3)^2$$

$$(\gamma) \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^8 (5\kappa - 4) \right)$$

$$(\delta) \sum_{\lambda=v+1}^{3v-1} (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$(\epsilon) \sum_{\kappa=1}^v \left(e^{(\kappa+1)} - e^{(\kappa+2)} \right)$$

2. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των v πρώτων όρων της σειράς, ($v \in \mathbb{N}$):

$$(\alpha) 4 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 9 + \dots$$

$$(\beta) 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 10^2 + \dots$$

$$(\gamma) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{3}{(3\kappa + 1)(3\kappa + 4)}$$

$$(\delta) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{2}{4\kappa^2 - 1}$$

$$(\epsilon) \sum_{\kappa=1}^{20} \left(\ln \frac{\kappa}{\kappa + 1} \right)$$

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα των v πρώτων όρων της πιο κάτω σειράς.

$$(\alpha) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{4^{v+2}}{6^v}$$

$$(\beta) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v+1}{3^v}$$

$$(\gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{4v - 3^v}{5^v}$$

Στη συνέχεια, να εξετάσετε κατά πόσο συγκλίνει.

ΣΥΝΟΛΑ

1. α) Σ' ένα τμήμα της Γ' Λυκείου με 13 μαθητές να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 μαθητές που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα του χρόνου.

β) Σε ένα πλυντήριο υπάρχουν 5 ζευγάρια καλτσών (συνολικά 10 κάλτσες) διαφορετικού χρώματος. Πόσες τουλάχιστον κάλτσες πρέπει να τραβήξω για να είμαι σίγουρος ότι θα έχω τουλάχιστον δυο ίδιου χρώματος;

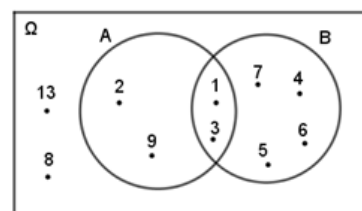
γ) Σε μια συνάντηση συμμετείχαν 113 παιδιά από 7 διαφορετικές χώρες. Δείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χώρα με 17 μαθητές.

2. Το διτλανό σχήμα παρουσιάζεται ένα σύνολο αναφοράς Ω και τα υποσύνολα του A και B.

α) Να βρείτε τα πιο κάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων

τους: i) $A \cap B$ ii) $(A \cup B)'$ iii) $B - A$

β) Πόσα υποσύνολα του συνόλου B με πληθικό αριθμό 3 υπάρχουν;



3. Σε μια τάξη των 24 παιδιών, οι 14 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το καρπούζι, ενώ οι 10 προτιμούν το πεπόνι. Αν υπάρχουν 6 παιδιά που δεν προτιμούν ούτε καρπούζι, ούτε πεπόνι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και καρπούζι και πεπόνι;

4. Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{\text{γράμματα της λέξης } \alpha\lambda\gamma\epsilon\beta\rho\alpha\},$

$B = \{\text{γράμματα της λέξης } \phi\rho\epsilon\gamma\acute{\alpha}\tau\alpha\} \text{ και}$

$\Gamma = \{\text{γράμματα της λέξης } \epsilon\lambda\acute{\alpha}\phi\iota\}.$

α) Να γράψετε τα σύνολα A, B, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.

β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $B \cup \Gamma$, $A \cap B$, $A \cap \Gamma$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Αν $\Delta_2^v = 30$ να υπολογίσετε το $\binom{I}{4}$
2. Δίνονται οι αριθμοί 4,5,6,7,8
 - α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μεγαλύτερους του 700 μπορούμε να σχηματίσουμε αν
 - i. επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων
 - ii. δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων
 - β) Πόσους αριθμούς μικρότερους του 500 μπορούμε να σχηματίσουμε αν
 - i. επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων
 - ii. δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων
3. Για την εκλογή πενταμελούς συμβουλίου υπέβαλαν υποψηφιότητα 7 άνδρες και 5 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί το συμβούλιο αν πρέπει να έχει
 - α) μόνο 2 γυναίκες;
 - β) μέχρι 2 γυναίκες;
4.
 - α) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 0,1,3,5,6,8,9;
 - β) Πόσοι από τους πιο πάνω είναι άρτιοι;
 - γ) Πόσοι από τους αριθμούς του ερωτήματος (β) είναι μεγαλύτεροι του 5000;
 - δ) Αν πάρουμε ένα από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) ποιά η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι μεγαλύτερος του 3000 και μικρότερος του 9000;
5. Να βρείτε το πλήθος όλων των πενταψήφιων αριθμών που τα ψηφία τους είναι σε φθίνουσα σειρά.
6. Έχουμε τις ομάδες αριθμών A(2,3,4,5) και B(1,5,6). Παίρνουμε 3 αριθμούς από την πρώτη ομάδα και 2 από την δεύτερη. Πόσους πενταψήφιους σχηματίζουμε;
Αν πάρω ένα από αυτούς ποια η πιθανότητα να διαιρείται δια 5.
7. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ενός πειράματος τύχης.
Αν $P(\alpha) = 2P(\beta) = 3P(\gamma) = P(\delta)$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$, $P(\delta)$.
8. Δίνονται τα ψηφία 0, 2,3,4,5,6, 9. Αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου να βρείτε:
 - α) πόσοι τετραψήφιοι γίνονται,
 - β) πόσοι τετραψήφιοι είναι ζυγοί,
 - γ) πόσοι τετραψήφιοι από αυτούς διαιρούνται με το 5.
9. Δίνεται η λέξη ΠΑΣΧΑΛΙΑ
 - α) πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν
 - β) πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από Α και τελειώνουν σε Α
 - γ) πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από φωνήεν
 - δ) πόσοι αναγραμματισμοί έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;

10. Αν $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

α) $P(A \cup B) =$ β) $P(B \cup A') =$ γ) $P(A') =$ δ) $P(A \cap B') =$ ε) $P(A' \cup B') =$

11. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου δίδονται οι πιθανότητες:

$P(A - B) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(B / A) = \frac{1}{2}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cap B)$ β) $P(A)$ γ) $P(A / B)$ δ) $P(A \cup B)$ ε) $P(A' \cap B')$.

12. (α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΥΡΟΒΟΛΙΚΟ υπάρχουν;

(β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να έχει τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

(γ) Αν πάρουμε στη τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) ποιά η πιθανότητα του ενδεχομένου ο αναγραμματισμός να μην έχει τα τρία Ο σε συνεχόμενες θέσεις.

13. Μια κάλπη περιέχει 1 μαύρη, 4 κίτρινες και 5 πράσινες μπάλες. Κάποιος παίρνει τυχαία μια μπάλα από την κάλπη. Αν πάρει κίτρινη ή πράσινη δεν παίρνει άλλη μπάλα. Αν όμως πάρει την μαύρη τότε, χωρίς να την επανατοποθετήσει, παίρνει και δεύτερη μπάλα από την κάλπη.

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες:

i. Να πήρε δύο μπάλες από την κάλπη.

ii. Να πήρε κίτρινη μπάλα.

(β) Δεδομένου ότι πήρε κίτρινη μπάλα, να βρείτε την πιθανότητα αυτό να έγινε στην πρώτη επιλογή μπάλας.

14. Ο Αντρέας κάλεσε στα γενέθλια του 10 φίλους του. Ποιά η πιθανότητα του ενδεχομένου τρεις

από τους φίλους του να έχουν τα γενέθλια τους την ίδια μέρα με αυτόν και έτσι δεν θα μπορέσουν να παρεβρεθούν στο πάρτι.

15. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

A.: ο μαθητής να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς

B.: ο μαθητής να συμμετέχει σ' έναν μόνον από τους δύο διαγωνισμούς

Γ.: ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς.

16. Δέκα ζεύγη με διαφορετικά παπούτσια είναι ανακατεμένα σ' ένα κιβώτιο. Παίρνουμε στην τύχη 4 παπούτσια. Ποια η πιθανότητα να υπάρξει μεταξύ αυτών ένα τουλάχιστον ζεύγος.

17. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου και τον ορισμό των ασυμβίβαστων ενδεχόμενων.
18. Επιλέγουμε τυχαία πέντε ανθρώπους και καταγράφουμε τον μήνα γέννησης του καθενός ξεχωριστά.
 (α) Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 12^5$.
 (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 A = «οι πέντε άνθρωποι έχουν γεννηθεί σε διαφορετικούς μήνες»
 B = «τουλάχιστον δύο άνθρωποι έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα»
19. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , δίνονται οι πιθανότητες:
 $P(A - B) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:
 (α) $P(A \cap B)$ (β) $P(A)$ (γ) $P(A|B)$ (δ) $P(A \cup B)$ (ε) $P(A' \cap B')$
20. Ο κύριος Παναγιώτης ζει σε ένα νησάκι στην Καραϊβική και κάθε βράδι ψαρεύει από το μπαλκόνι του σπιτιού του που είναι κτισμένο σε ένα βράχο της ακρογιαλιάς. Κάθε φορά που ρίχνει πετονιά, η πιθανότητα να ψαρέψει καρχαρία είναι 13%, να ψαρέψει ροφό είναι 23%, ενώ η πιθανότητα να μην ψαρέψει ούτε καρχαρία ούτε ροφό είναι 66%. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 A = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει είτε καρχαρία, είτε ροφό, είτε και τα δύο»
 B = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει καρχαρία και ροφό»
 Γ = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει ακριβώς ένα είδος ψαριού»
 Δ = «ο κύριος Παναγιώτης να ψαρέψει καρχαρία, δεδομένου ότι έχει ήδη ψαρέψει ροφό».
21. Δίνεται η λέξη **ΑΙΣΙΟΔΟΞΟ**.
 (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
 (β) Να βρείτε σε πόσους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης:
 (i) η λέξη **ΟΔΟΣ** βρίσκεται στο τέλος
 (ii) τα σύμφωνα είναι μαζί
 (iii) το **Σ** προηγείται του **Α** και το **Δ** του **Ξ**. Για παράδειγμα «**ΟΣΑΙΟΔΞΟΙ**» και «**ΙΣΙΑΟΔΟΟΞ**» είναι δύο τέτοιοι αναγραμματισμοί.
 (iv) δεν έχουν δύο **Ο** συνεχόμενα.
22. Δύο κουτιά περιέχουν, 6 κόκκινες και 4 πράσινες αριθμημένες μπάλες το πρώτο κουτί και 4 κόκκινες και 6 πράσινες αριθμημένες μπάλες το δεύτερο κουτί. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 4 επιλέγουμε μία μπάλα από το πρώτο κουτί, διαφορετικά παίρνουμε μία μπάλα από το δεύτερο κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 A = «η μπάλα που επιλέξαμε να είναι πράσινη»
 B = «η μπάλα να προέρχεται από το πρώτο κουτί, δεδομένου ότι είναι πράσινη».
23. Το 40% των φορτηγών στην Κύπρο, είναι ρυπογόνα (εκπέμπουν καυσαέρια έξω από τα φυσιολογικά όρια). Ο τεχνικός μίας εταιρείας κάνει έλεγχο καυσαερίων στα 6 φορτηγά της εταιρείας αυτής. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 A = «ο τεχνικός να εντοπίσει ακριβώς 3 ρυπογόνα φορτηγά»
 B = «ο τεχνικός να εντοπίσει το πολύ 2 ρυπογόνα φορτηγά»
 Γ = «ο τεχνικός να εντοπίσει τουλάχιστον 1 ρυπογόνο και 1 μη ρυπογόνο φορτηγό».

ΚΥΚΛΟΣ – ΠΑΡΑΒΟΛΗ - ΈΛΛΕΙΨΗ

1. Να δείξετε ότι ο κύκλος που έχει κέντρο $K(10,8)$ και περνά από το σημείο $A(2,2)$ είναι ο:

$$x^2 + y^2 - 20x - 16y + 64 = 0.$$

(ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται του $O\Psi$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(2,2)$.

2. Δίνεται ο κύκλος $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

(α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(2,-2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το A .

(γ) Να βρείτε το μήκος της πιο πάνω χορδής.

3. (α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, τις εστίες της

στον άξονα $x'x$, εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$.

(β) Η κάθετη της έλλειψης $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ στο σημείο της $P(2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta, \sqrt{2}\eta\mu\theta)$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$

στο Δ .

(i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $P\Delta$ και να το χαρακτηρίσετε.

(ii) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $E'AD$ ισούται με $\frac{3(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{2} \tau.μ$ να βρείτε τις συντεταγμένες

του P . (Α η κορυφή της έλλειψης στο θετικό ημιάξονα των x και E' η εστία στον αρνητικό ημιάξονα των x).

4. Η εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ τέμνει τη διευθετούσα στο A . Από το A φέρουμε ευθεία $\varepsilon//ox$ η οποία τέμνει την κάθετη της παραβολής στο P στο σημείο B . Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του B είναι $y^2 = \alpha(x-3\alpha)$.

5. Δίνεται ο κύκλος $(K_1): x^2 + y^2 = 16$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του $P(4\sigma\upsilon\nu\theta, 4\eta\mu\theta)$ τέμνει την ευθεία $x = 4$ στο B και την ευθεία $x = -4$ στο B' . Αν A, A' είναι τα σημεία που τέμνει ο κύκλος τον xx' . Να δείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο P είναι: $x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = 4$.

(ii) $(AB) \cdot (A'B') = 16$

(iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του $A'P$.

(iv) Να δείξετε ότι ο ζητούμενος γ.τόπος είναι κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του (K_1) .

6. Η ευθεία $y = \lambda x$ ($\lambda > 0$) τέμνει την υπερβολή $xy = 4$ στα σημεία Α και Β.
- (α) Ναδειχτεί ότι οι εφαπτομένες της υπερβολής στα Α και Β είναι παράλληλες.
- (β) Ναδειχτεί ότι η απόσταση d μεταξύ των εφαπτομένων στα Α και Β είναι $d = \frac{8\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.
- (γ) Στη συνέχεια να βρεθεί η μέγιστη απόσταση μεταξύ των εφαπτομένων στα Α και Β, όταν το λ μεταβάλλεται.
7. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (η): $2x - 2y + 7 = 0$.
8. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης (c): $x^2 + 4y^2 = 36$, η οποία έχει μέσο το σημείο $M(2,1)$.
9. Μια ευθεία (ε), που διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής (c): $y^2 = 2ax$, $a > 0$ τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β. Έστω Γ, Δ οι προβολές των σημείων Α και Β πάνω στη διευθετούσα (δ). Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής.
10. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών της, την εκκεντρότητά της και τις εξισώσεις των διευθετούσών της και τις παραμετρικές της εξισώσεις.
- (γ) Αν το σημείο Ρ είναι ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης να υπολογίσετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΕΡΕ'.
11. (α) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $E(2,3)$ και διευθετούσα $x = 7$.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την $2x + y = 10$ και εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 8x$.
12. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$ και $A(3t_1^2, 6t_1)$, $B(3t_2^2, 6t_2)$ δύο σημεία της, $t_1 \neq t_2$.
- (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της στα σημεία Α και Β.
- (β) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενες αυτές τέμνονται στο σημείο $\Gamma(3t_1t_2, 3(t_1 + t_2))$.
- (γ) Αν οι εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β είναι κάθετες να δείξετε ότι αυτές τέμνονται πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου της χορδής ΑΒ, αν επιπλέον $t_1t_2 = 1$.

13. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και ένα σημείο της $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 4\eta\mu\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P είναι
(κ) : $5x\eta\mu\theta - 4y\sigma\upsilon\nu\theta = 9\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.
- (β) Από το P φέρουμε τις ευθείες PT και ΡΣ παράλληλες προς τους άξονες O x και O y αντίστοιχα, που τέμνουν την έλλειψη στα σημεία T και Σ. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΤΣ είναι $4x\eta\mu\theta + 5y\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.
- (γ) Αν M είναι το σημείο που η ΤΣ τέμνει την κάθετη (κ), να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι έλλειψη.
14. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου:
- α) με κέντρο $K(-2, 1)$ και ακτίνα 3cm
β) που έχει ακτίνα 4cm και εφάπτεται των θετικών ημιαξόνων
γ) που έχει διάμετρο AB όπου $A(3, 2)$ και $B(1, -4)$.
15. Δίδονται οι κύκλοι $K_1 : x^2 + \psi^2 = 4$
 $K_2 : x^2 + \psi^2 - 6x - 8\psi + 16 = 0$.
- Να βρείτε:
- α) τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων
β) τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου K_2
γ) τη θέση των κύκλων K_1, K_2
δ) το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $(-2, 3)$ προς τον κύκλο K_1
ε) τη θέση του σημείου A $(2, -5)$ ως προς τον K_2 .
16. Να βρείτε τη γωνιά που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες που άγονται από την αρχή των αξόνων προς τον κύκλο $x^2 + \psi^2 - 4x + 2 = 0$.
17. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + \psi^2 - 2\psi = 3$. Η εφαπτομένη του στο σημείο $T(2\sigma\upsilon\nu\theta, 1 + 2\eta\mu\theta)$ τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A και B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB.
18. Δίνεται κύκλος $x^2 + \psi^2 = 4$ και $A(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ τυχόν σημείο του κύκλου. Από το A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των x και ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των ψ. Οι ευθείες τέμνουν τους άξονες στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν το σημείο A βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο να βρείτε τις συντεταγμένες του A έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου OBAΓ να είναι μέγιστο (O η αρχή των αξόνων).

19. (α) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

(β) Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες των εστιών της και την εκκεντρότητά της

ii. τις εξισώσεις των διευθετούσών της

ii. τη θέση του σημείου $\Sigma(-\sqrt{2}, 0)$ ως προς την έλλειψη

iii. τις αποστάσεις του σημείου της $T\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ από τις εστίες της έλλειψης E και E'.

20. Δίνεται η έλλειψη $(E_1): x^2 + \frac{y^2}{\rho^2} = 1, 0 < \rho < 1$ και τυχαίο σημείο της $P(\text{συν}\theta, \rho\eta\mu\theta)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της P είναι: $\chi\rho\sigma\eta\theta + \gamma\eta\mu\theta = \rho$.

β) Από την αρχή των αξόνων O φέρουμε ευθεία κάθετη στην εφαπτομένη και ονομάζουμε A το σημείο που τέμνει την εφαπτομένη. Στη συνέχεια από το σημείο P φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων που συναντά την ευθεία OA στο T. Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει γεωμετρικός τόπος του σημείου T είναι η έλλειψη $(E_2): x^2 + \rho^2 y^2 = 1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών της.

21. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ με εστία E.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(at^2, 2at)$ είναι η:

$$x - ty + at^2 = 0 \text{ και της κάθετης της στο A είναι η } tx + y = 2at + at^3.$$

β) Η κάθετη της παραβολής στο A τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο B. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB.

γ) Η εφαπτομένη στο A τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, η οποία τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο Δ. Να δείξετε το τετράπλευρο AEGΔ είναι ρόμβος.

22. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta$ με εστίες E και E'.

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει την ίδια εστία με την εστία E της έλλειψης.

β) Από την εστία E' της έλλειψης, φέρουμε εφαπτομένη προς την παραβολή, η οποία εφάπτεται της παραβολής στο σημείο P (α' τεταρτημόριο). Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = x + \gamma$.

γ) Αν η κάθετη της παραβολής στο P περνά από την κορυφή A(α,0) της έλλειψης, να δείξετε ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με $\frac{1}{3}$.

23. Δίνεται η έλλειψη: $x^2 + 4y^2 = 4$. Να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών της
- β) την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετούσών της.

24. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, και σημείο $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ πάνω σε αυτή. Η εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Στα σημεία Γ και Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Τ. Να βρείτε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Τ, καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη.

25. Παραβολή έχει εστία το σημείο $(a, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = -a$.

α) i) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής

ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραβολής να δείξετε ότι η εξίσωση της είναι $y^2 = 4ax$.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(a\rho^2, 2a\rho)$.

γ) Αν AB είναι εστιακή χορδή να δείξετε ότι:

- i) οι πιο πάνω εφαπτομένες είναι κάθετες μεταξύ τους
- ii) το σημείο τομής των πιο πάνω εφαπτομένων ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής.
- iii) να βρείτε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της χορδής της AB.