



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

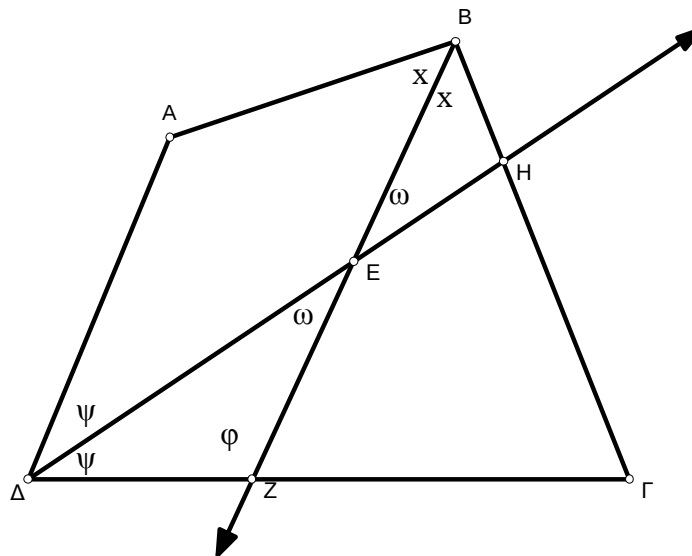
Ημερομηνία: 16/12/06

Ωρα εξέτασης: 09:30-12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} > \hat{\Gamma}$. Οι διχοτόμοι ΒΖ και ΔΗ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{A}$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι $\hat{B\hat{E}H} = \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}$.

ΛΥΣΗ



Θέτω $\frac{\hat{A}}{2} = \hat{x}$, $\frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\psi}$, $\hat{\Delta\hat{Z}E} = \hat{\phi}$ και $\hat{B\hat{E}H} = \hat{\omega}$.

Στο τρίγωνο $\Delta\hat{E}Z$ έχουμε: $\hat{\phi} + \hat{\omega} + \hat{\psi} = 180^\circ$.

Επίσης $\hat{\phi} = \hat{x} + \hat{\Gamma}$, αφού $\hat{\phi}$ εξωτερική γωνιά του $B\hat{Z}G$.

Άρα $\hat{x} + \hat{\Gamma} + \hat{\omega} + \hat{\psi} = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{\psi} = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\omega}$ (1)

ΑΒΓΔ τετράπλευρο άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} + \hat{\psi} = 180^\circ$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2} = \hat{\omega} = \hat{B\hat{E}H}$

2. (α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ αληθής!}$$

Άρα η αρχική πρόταση ισχύει.

(β) Με τη βοήθεια της προηγούμενης σχέσης ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι:

$$(\chi + \psi + \omega) \cdot \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} \right) \geq 9 \text{ με } \chi, \psi, \omega > 0.$$

ΛΥΣΗ

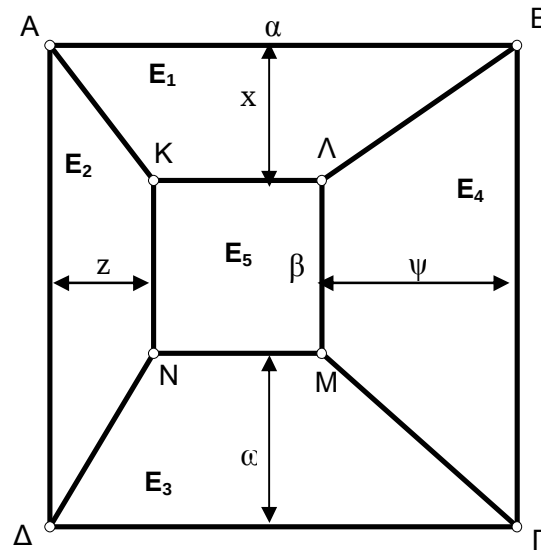
$$(\chi + \psi + \omega) \cdot \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} \right) = 1 + \frac{\psi}{\chi} + \frac{\omega}{\chi} + \frac{\chi}{\psi} + 1 + \frac{\omega}{\psi} + \frac{\chi}{\omega} + \frac{\psi}{\omega} + 1 = 3 + \left(\frac{\psi}{\chi} + \frac{\chi}{\psi} \right) + \left(\frac{\omega}{\chi} + \frac{\chi}{\omega} \right) + \left(\frac{\omega}{\psi} + \frac{\psi}{\omega} \right)$$

$$\stackrel{*}{\geq} 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$*(\alpha) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

3. Τα τετράπλευρα ABΓΔ και ΚΛΜΝ είναι δύο τετράγωνα που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα τετράγωνα ABΓΔ είναι χωρισμένο σε πέντε μέρη (E_1 , E_2 , E_3 , E_4 και E_5). Ο Γιώργος θα βάψει τα μέρη E_1 και E_3 με κόκκινη μπογιά, ενώ τα μέρη E_2 και E_4 θα τα βάψει με μπλε μπογιά. Το μέρος E_5 δεν θα το βάψει. Να αποδείξετε ότι θα χρειαστεί την ίδια ποσότητα κόκκινης και μπλε μπογιάς.

ΛΥΣΗ



Θέτω x , z , ω και ψ τα ύψη για τα τραπέζια ABΚ, ΑΚΝΔ, ΔΝΜΓ και ΓΜΛΒ αντίστοιχα. Επίσης η πλευρά του τετραγώνου ABΓΔ ας είναι α και του ΚΛΜΝ β .

Τότε έχουμε τα εμβαδά των τραπεζίων:

$$E_1 = \frac{(\alpha + \beta) \cdot x}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot x$$

$$E_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \psi, \quad E_3 = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \omega \quad \text{και} \quad E_4 = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot z$$

Άρα

$$E_1 + E_3 = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot x + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \omega = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (x + \omega) = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (\alpha - \beta)$$

$$E_2 + E_4 = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \psi + \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot z = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (\psi + z) = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (\alpha - \beta)$$

$\Rightarrow E_1 + E_3 = E_2 + E_4 \Rightarrow$ άρα θα χρειαστεί η ίδια ποσότητα κόκκινης και μπλε μπογιάς.

4. Να υπολογίσετε το γινόμενο: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2006^2}\right)$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2006^2}\right) \\
 &= \left(\frac{2^2 - 1}{2 \cdot 2}\right) \cdot \left(\frac{3^2 - 1}{3 \cdot 3}\right) \cdot \left(\frac{4^2 - 1}{4 \cdot 4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2006^2 - 1}{2006 \cdot 2006}\right) \\
 &= \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2}\right) \cdot \left(\frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3}\right) \cdot \left(\frac{(4-1)(4+1)}{4 \cdot 4}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{(2006-1)(2006+1)}{2006 \cdot 2006}\right) \\
 &= \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \dots \cdot \cancel{2004} \cdot \cancel{2006} \cdot \cancel{2005} \cdot 2007}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \dots \cdot \cancel{2005} \cdot \cancel{2005} \cdot \cancel{2006} \cdot 2006} \\
 &= \frac{1 \cdot 2007}{2 \cdot 2006} = \frac{2007}{4012}
 \end{aligned}$$

5. Να βρείτε όλες τις τριάδες (μ, κ, ν) των θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την αναλογία: $\frac{2\mu}{2+\mu} = \frac{3\kappa}{3+\kappa} = \frac{4\nu}{4+\nu}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\frac{2\mu}{2+\mu} < 2$, αφού αν υποθέσουμε ότι $\frac{2\mu}{2+\mu} \geq 2 \Leftrightarrow 2\mu \geq 4 + 2\mu \Leftrightarrow 0 \geq 4 \Leftrightarrow$ αδύνατο !

Έτσι από την αναλογία $\frac{2\mu}{2+\mu} = \frac{3\kappa}{3+\kappa} = \frac{4\nu}{4+\nu}$ (1) έχουμε:

$$\frac{3\kappa}{3+\kappa} < 2 \Leftrightarrow 3\kappa < 6 + 2\kappa \Leftrightarrow \boxed{\kappa < 6} \quad \text{και} \quad \frac{4\nu}{4+\nu} < 2 \Leftrightarrow 4\nu < 8 + 2\nu \Leftrightarrow \boxed{\nu < 4}$$

Άρα $\kappa \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\nu \in \{1, 2, 3\}$, έτσι έχουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- Αν $\nu=1$, τότε από (1) έχουμε:

$$\frac{2\mu}{2+\mu} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 10\mu = 8 + 4\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}^*$$
$$\frac{3\kappa}{3+\kappa} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 15\kappa = 12 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{12}{11} \notin \mathbb{N}^*$$

- Αν $\nu=2$, τότε από (1) έχουμε:

$$\frac{2\mu}{2+\mu} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6\mu = 8 + 4\mu \Leftrightarrow \mu = 4 \in \mathbb{N}^*$$
$$\frac{3\kappa}{3+\kappa} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9\kappa = 12 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{12}{5} \notin \mathbb{N}^*$$

- Αν $\nu=3$, τότε από (1) έχουμε:

$$\frac{2\mu}{2+\mu} = \frac{12}{7} \Leftrightarrow 14\mu = 24 + 12\mu \Leftrightarrow \mu = 12 \in \mathbb{N}^*$$
$$\frac{3\kappa}{3+\kappa} = \frac{12}{7} \Leftrightarrow 21\kappa = 36 + 12\kappa \Leftrightarrow \kappa = 4 \in \mathbb{N}^*$$

Άρα $\boxed{(\mu, \kappa, \nu) = (12, 4, 3)}$