



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/2010

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

Προτεινόμενες λύσεις

1. (α) Αν $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$, $xy \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

(i) $y \neq 3$ (ii) $x = 3 + \frac{9}{y-3}$

(β) Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους x, y που ικανοποιούν την

εξίσωση $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

Λύση:

(α) Αν ήταν $y = 3$, τότε $\frac{1}{x} = 0$ άτοπο. Άρα $y \neq 3$

$$3y + 3x = xy \Leftrightarrow x(y-3) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{y-3} = \frac{3y-9+9}{y-3} = \frac{3(y-3)}{y-3} + \frac{9}{y-3} = 3 + \frac{9}{y-3}$$

(β) Από τη σχέση που αποδείχθηκε στο (α), $x = 3 + \frac{9}{y-3}$, παρατηρούμε ότι

για να είναι το x ακέραιος πρέπει το $y-3$ να είναι ένας από τους διαιρέτες του 9, δηλαδή το $(y-3) \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$.

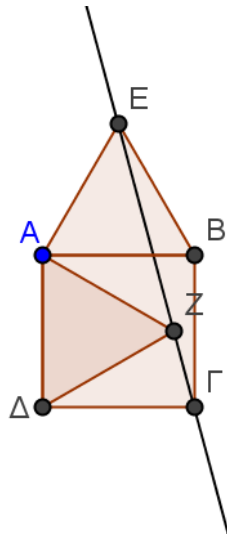
Με δοκιμές βρίσκουμε τις λύσεις:

$$x=12, y=4 \text{ ή } x=6, y=6 \text{ ή } x=4, y=12.$$

2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΕΒ έξω από το τετράγωνο και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΖΔ μέσα στο τετράγωνο.

Να αποδείξετε ότι το σημείο Ζ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΕΓ.

Λύση:



Λύση:

Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές (ΑΕ=ΑΖ)

$$\widehat{BZA} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\widehat{EZA} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\text{Άρα } \widehat{EZA} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές (ΔΖ=ΔΓ)

$$\widehat{Z\Gamma A} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\widehat{\Delta Z \Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\widehat{E \hat{Z} \Gamma} = \widehat{\Delta \hat{Z} A} + \widehat{\Delta \hat{Z} \Gamma} + \widehat{E \hat{Z} A} = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ (\text{ευθεία γωνία})$$

Άρα τα σημεία Ε, Ζ, Γ είναι συνευθειακά. Άρα το σημείο Ζ βρίσκεται στην ευθεία ΕΓ.

3. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

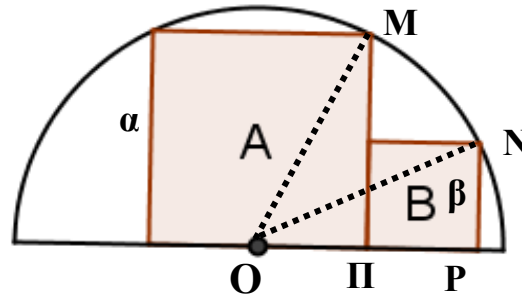
$$2^{2010} - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2)$$

$$2^{2010} - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2)$$

Λύση:

$$\begin{aligned} & 2^{2010} - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2) = \\ & = 2^{2010} - 2^{2009} - (2^{2008} + \dots + 2^2 + 2) = \\ & = 2 \cdot 2^{2009} - 2^{2009} - (2^{2008} + \dots + 2^2 + 2) = \\ & = 2^{2009} - (2^{2008} + \dots + 2^2 + 2) = \quad = \\ & = 2 \cdot 2^{2008} - 2^{2008} - (2^{2007} + \dots + 2^2 + 2) = \\ & = 2^{2008} - (2^{2007} + \dots + 2^2 + 2) = \dots = 2^2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

4. Δύο τετράγωνα με εμβαδόν A και B είναι εγγεγραμμένα σε ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα . Να βρείτε το λόγο $\frac{A}{B}$.



Λύση:

Ονομάζω a και β τις πλευρές των τετραγώνων A και B αντίστοιχα.

Το τρίγωνο OMN είναι ορθογώνιο άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$(OM)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

Το τρίγωνο OPN είναι ορθογώνιο άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$(ON)^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \beta^2$$

$$\text{Όμως } OM = ON = R \text{ άρα } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2\beta^2 - a\beta = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a}{\beta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{a}{\beta}\right) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{a}{\beta}\right) - 2\right) \left(\left(\frac{a}{\beta}\right) + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{\beta}\right) = 2 \text{ ή } \left(\frac{a}{\beta}\right) = -1 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\beta} = 2 \quad \Rightarrow \frac{A}{B} = 4$$