



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2011 Ώρα εξέτασης: 9:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως της απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ μέσα στο τρίγωνο. Από το σημείο Δ φέρνουμε τις κάθετες πάνω στις πλευρές του τριγώνου και έστω E, Z, H τα σημεία τομής τους με τις πλευρές $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Αν $\Delta E = 1, \Delta Z = 2$ και $\Delta H = 3$ να υπολογίσετε την πλευρά AB .

Λύση:

Αν α ο μήκος της πλευράς και v το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου έχουμε την εξής σχέση για τα εμβαδά:

$$Εμβ(AB\Gamma) = Εμβ(B\Delta\Gamma) + Εμβ(\Gamma\Delta H) + Εμβ(A\Delta B)$$

Οπότε

$$\frac{\alpha \cdot v}{2} = \frac{\alpha \cdot 2}{2} + \frac{\alpha \cdot 3}{2} + \frac{\alpha \cdot 1}{2}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι $v = 6$ και άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4} + 6^2$

Οπότε $\alpha = 4\sqrt{3}$.

2. (α) Έστω m και n δυο διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Να δείξετε ότι ο αριθμός $mn + 1$ διαιρείται ακριβώς με το 4.
(β) Έστω α και β τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού $\overline{6\alpha\beta}$ ο οποίος διαιρείται με το 12. Ο $\overline{\alpha\beta}$ είναι επίσης μεγαλύτερος του 50. Να βρείτε το άθροισμα όλων των διψήφιων αριθμών $\overline{\alpha\beta}$ που ικανοποιούν τις πιο πάνω συνθήκες.

Λύση:

(α) Αφού οι δοθέντες περιττοί διαδοχικοί αριθμοί θα είναι της μορφής:

$$m = 2x + 1 \text{ και } n = 2x + 3, x \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως $mn + 1 = (2x + 1)(2x + 3) + 1 = 4x^2 + 8x + 3 + 1 = 4(x^2 + 2x + 1)$

Αφού ο δεύτερος παράγοντας ακέραιος προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Έχουμε ότι $\overline{6\alpha\beta} = 6 \cdot 100 + 10\alpha + \beta = 12 \cdot \kappa, \kappa \in \mathbb{N}$ και α, β ψηφία

Άρα $10\alpha + \beta = 12\kappa - 600$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $100 > 12\kappa - 600 > 50$

Δηλαδή $700 > 12\kappa > 650$ ή $58\frac{1}{3} > \kappa > 54\frac{1}{6}$

Αφού

$\kappa \in \mathbb{N}$ θα πρέπει $58 \geq \kappa \geq 55$ και κατά συνέπεια $\kappa = 55$ ή 56 ή 57 ή 58
Με βάση αυτές τις τιμές ο $\overline{\alpha\beta}$ παίρνει τις τιμές 60, 72, 84 και 96 που έχουν άθροισμα 312.

3. (α) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$$

- (β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$B = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8$$

Για ποιες τιμές των α και β η παράσταση B παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

Λύση:

$$(α) A^2 = 9 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + 9 + 4\sqrt{2} = 18 - 2\sqrt{49} = 4$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} < \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$ έχουμε ότι $A = -2$.

- (β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B &= \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8 = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 + 2\beta^2 - 8\beta + 8 \\ &= (\alpha - 5\beta)^2 + 2(\beta - 2)^2 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια η ελάχιστη τιμή της είναι $B = 0$ και την παίρνει όταν $\alpha - 5\beta = 0$ και $\beta - 2 = 0$, δηλαδή για $\beta = 2$ και $\alpha = 10$.

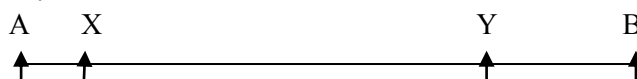
4. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 135Km μεταξύ τους. Τρία κορίτσια η Δώρα, η Μαρία και η Ρούλα ξεκινούν συγχρόνως από την πόλη Α για να πάνε στην πόλη Β. Περπατούν με σταθερή ταχύτητα 6Km/h και μπορούν να χρησιμοποιήσουν επίσης μια μοτοσυκλέτα που έχει σταθερή ταχύτητα 90Km/h και στην οποία μπορούν να καθίσουν δύο το πολύ άτομα. Έστω t ο χρόνος σε ώρες που χρειάζονται για να φτάσουν και οι τρεις στην πόλη Β. Να δείξετε ότι ο μικρότερος χρόνος t που χρειάζονται ικανοποιεί τη σχέση $t < 3,9h$. (Δεν λαμβάνονται υπόψη χρόνος για εκκίνηση, αλλαγή διεύθυνσης, μικρές στάσεις και τυχόν άλλες παρόμοιες καθυστερήσεις.

Λύση

Μια στρατηγική που θα μπορούσε να δώσει ένα πλαίσιο για να κινηθούν τα τρία άτομα (Δ , M , P) από το σημείο Α στο σημείο Β κινούμενα όλα κάθε χρονική στιγμή και θα φτάσουν και τα τρία στο Β την ίδια στιγμή είναι η ακόλουθη:

- Δ και M ανεβαίνουν στη μοτοσυκλέτα ενώ η P περπατά.
- Οι Δ και M φτάνουν με τη μοτοσυκλέτα σε ένα σημείο Y πριν από το B
- Η Δ αφήνει τη M και επιστρέφει πίσω ενώ οι P και M συνεχίζουν να περπατούν προς το B .
- Η Δ συναντά τη P σε ένα σημείο X
- Η Δ παίρνει τη P και τη βάζει στη μοτοσυκλέτα και ξεκινά και πάλι για να πάει προς το B έτσι ώστε να ξανασυναντήσουν τη M στο B .
- Το σημείο Y επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι Δ, M και P να φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο B .

Ας συμβολίσουμε με α km την απόσταση AX με δ km την απόσταση XY και με β km την απόσταση YB.



Κατά το χρόνο που η Ρ περπατά από το Α στο Χ με ταχύτητα $6Km/h$, η Δ κινείται με τη μοτοσυκλέτα από το Α στο Υ και στη συνέχεια πίσω στο Χ με ταχύτητα $90Km/h$. Εφόσον οι χρόνοι των Ρ και Δ για να φτάσουν ταυτόχρονα στο Χ είναι ίσοι θα έχουμε

$$\frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha+2\delta}{90} \quad \text{οπότε } 15\alpha = \alpha + 2\delta \text{ ή } 7\alpha = \delta.$$

Στο διάστημα που η Μ πρέπει να περπατήσει από το Υ στο Β, η Δ κινείται με τη μοτοσυκλέτα από το Υ στο Χ και πίσω στο Β, οπότε, αφού οι χρόνοι είναι οι ίδιοι,

$$\frac{\beta}{6} = \frac{\beta+2\delta}{90} \quad \text{οπότε } 15\beta = \beta + 2\delta \text{ ή } 7\beta = \delta.$$

Κατά συνέπεια θα είναι

$$\delta = 7\alpha = 7\beta \text{ και επομένως } \beta = \alpha$$

Αλλά $\alpha + \delta + \beta = 135$ οπότε $\alpha + 7\alpha + \alpha = 135$, δηλαδή $\alpha = 15km$

Τελικά λοιπόν βλέπουμε ότι η Δ κινήθηκε μια συνολική απόσταση

$$(\alpha + 7\alpha) + 7\alpha + (7\alpha + \alpha) = 23\alpha \text{ με ταχύτητα } 90Km/h$$

Άρα ο συνολικός χρόνος που χρειάστηκε με βάση αυτή την στρατηγική είναι

$$\frac{23 \cdot 15}{90} = \frac{23}{6} \approx 3,83 \text{ h}$$

Κατά συνέπεια αφού προσδιορίσαμε μια στρατηγική στην οποία ο χρόνος που μπορεί να επιτευχθεί το ζητούμενο είναι $3,83 \text{ h}$ προκύπτει ότι $t \leq 3,83$ και συνεπώς $t < 3,9$.