



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

1. Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 5$ με α, β θετικοί αριθμοί να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$

Λύση;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 5 &\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \sqrt{5} \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^3 &= \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\beta^3}{\alpha^3} + \frac{3\alpha}{\beta} + \frac{3\beta}{\alpha} \Rightarrow \\ \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\beta^3}{\alpha^3} &= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Rightarrow \\ \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\beta^3}{\alpha^3} &= (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5}) \Rightarrow \\ \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\beta^3}{\alpha^3} &= 5(\sqrt{5}) - 3(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

2. Κύκλος εφάπτεται με ευθεία στο σημείο P. Αν T σημείο της εφαπτομένης ώστε PT=20cm και η μικρότερη απόσταση του T από την περιφέρεια του κύκλου είναι 10cm να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου συναρτήσει του π .

PT εφαπτομένη με T σημείο του κύκλου άρα $\angle P = 90^\circ$

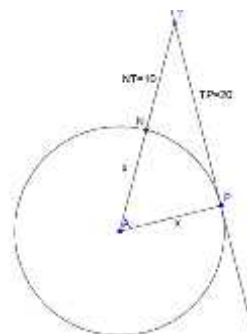
$$(AT)^2 = (TP)^2 + (AP)^2 \text{ Πυθαγ. θεωρ.}$$

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 400$$

$$x = 15$$

$$\text{Εμβαδόν} = \pi r^2 = 225\pi$$



3. Μια ομάδα οδοιπόρων ξεκινά στις 11:00π.μ. από την πόλη Α και πρέπει να φτάσει στην πόλη Τ, που απέχει από την πόλη Α 12km, ακριβώς στις 2:00μ.μ. Περπατώντας με ταχύτητα 3km/h φτάνουν στην ενδιάμεση πόλη Β στις 12:45μ.μ. Κατά πόσο ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα της ομάδας για να φτάσει στην πόλη Τ ακριβώς στις 2:00μ.μ.



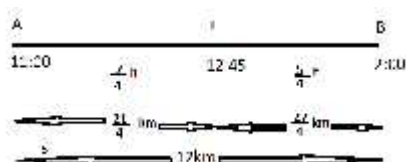
Περπατούν από τις 11:00 μέχρι της 12:45 δηλαδή για 1:45 ή για $\frac{7}{4}$ της ώρας

Ταχύτητα 3 km/h

Απόσταση ΑΓ, μέχρι 12:45 είναι $3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4} km$

Συνολική απόσταση 12km άρα το υπόλοιπο ΒΓ = $12 - \frac{21}{4} = \frac{27}{4} km$

Συνολικός χρόνος 3h άρα το υπόλοιπο του χρόνου $3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} h$

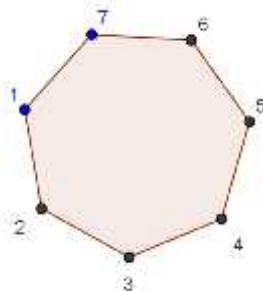


Νέα ταχύτητα $\frac{27}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{27}{5} = 5,4 \frac{km}{h}$

Αύξηση 2,4 km/h

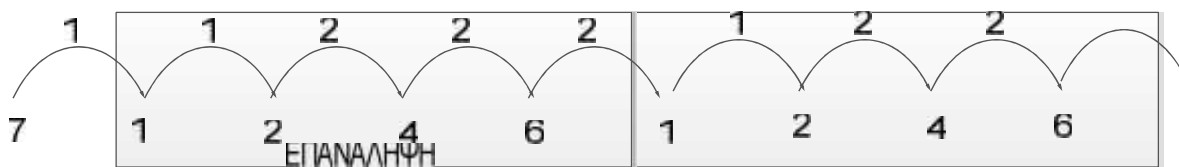
Το 2,4 είναι το 80% του 3 άρα η ταχύτητα αυξάνεται κατά 80% της αρχικής.

4. Ένα βατραχάκι κινείται με σταθερή φορά πάνω στις κορυφές του επταγώνου. Αν βρίσκεται σε κορυφή με περιττό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά μία κορυφή ενώ αν βρίσκεται σε κορυφή με ζυγό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά δύο κορυφές. Αν ξεκινήσει από την κορυφή 7, να βρείτε όλες τις πιθανές κορυφές στις οποίες μπορεί να βρεθεί μετά από 2011 πηδήματα.



Περίπτωση 1^η

Κίνηση με φορά αντίθετη του ρολογιού:



Παρατηρούμε ότι κάθε 4 πηδήματα επαναλαμβάνετε η διαδικασία

$$2011 \div 4 = 502 \frac{3}{4}$$

Άρα θα γίνουν 502 επαναλήψεις και θα υπολείπονται 3 πηδήματα.

$$7 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$$

Άρα θα φτάσει στην θέση 4

Περίπτωση 2^η : φορά ρολογιού

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολείπονται 3 πηδήματα

$$7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$$

Άρα θα φτάσει στην θέση 2