



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2012

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα . Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ επαληθεύουν τις εξισώσεις
$$\begin{cases} \alpha + \frac{2}{\beta\gamma} = \frac{1}{4} \\ \beta + \frac{2}{\alpha\gamma} = -\frac{1}{12} \\ \gamma + \frac{2}{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

να υπολογίσετε το λόγο : $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$.

Λύση

$$\begin{cases} \alpha + \frac{2}{\beta\gamma} = \frac{1}{4} \\ \beta + \frac{2}{\alpha\gamma} = -\frac{1}{12} \\ \gamma + \frac{2}{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta\gamma + 2 = \frac{\beta\gamma}{4} \\ \alpha\beta\gamma + 2 = -\frac{\alpha\gamma}{12} \\ \alpha\beta\gamma + 2 = \frac{\alpha\beta}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma}{4} = -\frac{\alpha\gamma}{12} = \frac{\alpha\beta}{3}. \text{ Από την } \frac{\beta\gamma}{4} = -\frac{\alpha\gamma}{12}, \text{ έχουμε}$$
$$\frac{\beta}{4} = -\frac{\alpha}{12} \Leftrightarrow \alpha = -3\beta, \text{ ενώ από την } -\frac{\alpha\gamma}{12} = \frac{\alpha\beta}{3} \Leftrightarrow \gamma = -4\beta.$$

$$\text{Έτσι ο λόγος είναι: } \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{-4\beta-\beta}{-4\beta+3\beta} = -\frac{5\beta}{-\beta} = 5$$

2. Να αποδείξετε ότι:

(α) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$

(β) $\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma + \frac{\alpha}{\beta\gamma}\right) \geq 8$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Λύση

(α) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$,

(β) Από την ισότητα: $x + y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2$, επειδή $x, y > 0$ έχουμε:

$$x + y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{xy} \quad , \text{διότι } (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0, \text{ για}$$

κάθε $x, y > 0$ (το " = " ισχύει όταν $x = y$). Έτσι: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα το μέρους (α) και εφαρμόζοντας την σε κάθε παράγοντα του γινομένου $\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma + \frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)$, έχουμε:

$$\alpha + \frac{\beta}{\gamma\alpha} \geq 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma\alpha}} = 2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

$$\beta + \frac{\gamma}{\alpha\beta} \geq 2\sqrt{\beta \cdot \frac{\gamma}{\alpha\beta}} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$\gamma + \frac{\alpha}{\beta\gamma} \geq 2\sqrt{\gamma \cdot \frac{\alpha}{\beta\gamma}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:}$$

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma + \frac{\alpha}{\beta\gamma}\right) \geq 2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot 2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 8\sqrt{\frac{\beta\gamma\alpha}{\gamma\alpha\beta}} = 8$$

3. Να βρείτε όλους τους ακέραιους x, y που επαληθεύουν την εξίσωση:
 $xy - 3x + 11y = 20$.

Λύση

Η εξίσωση: $xy - 3x + 11y = 20$ μπορεί να γραφεί και ως $x(y - 3) + 11y = 20$.
 Αφαιρώντας 33 και από τα δύο μέλη, έχουμε: $x(y - 3) + 11y - 33 = 20 - 33$,
 $x(y - 3) + 11(y - 3) = -13 \Leftrightarrow (y - 3)(x + 11) = -13$. Το 13 είναι πρώτος και
 άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

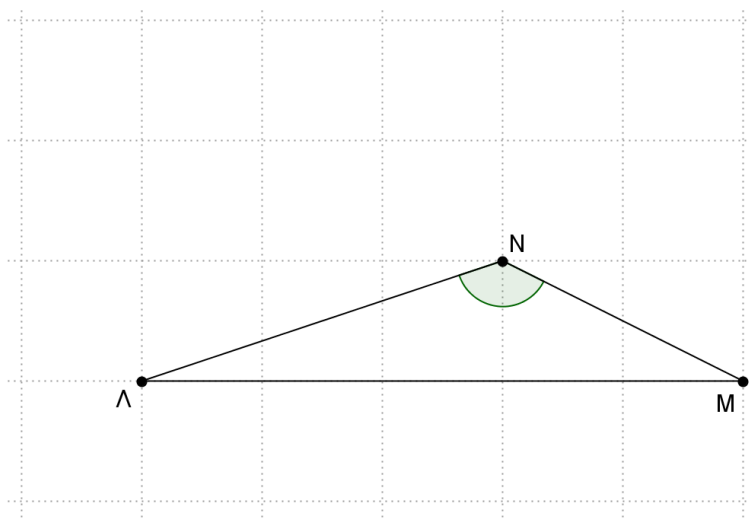
$$\begin{cases} y - 3 = 1 \\ x + 11 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4, x = -24$$

$$\begin{cases} y - 3 = -1 \\ x + 11 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2, x = 2$$

$$\begin{cases} y - 3 = 13 \\ x + 11 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 16, x = -12$$

$$\begin{cases} y - 3 = -13 \\ x + 11 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = -10, x = -10$$

4. Τα τετράγωνα του πλέγματος στο πιο κάτω σχήμα, έχουν πλευρά 1. Να υπολογίσετε την γωνία $\angle \hat{N}M$ του τριγώνου.



Λύση

Προεκτείνοντας την πλευρά MN , έτσι ώστε $MN = NH$ και παρατηρούμε άμεσα από το σχήμα ότι το $\Lambda H = NH$, και η γωνία $\Lambda HN = 90^\circ$ (από τα ίσα τρίγωνα $\Lambda\Lambda H, NBH$ και τις συμπληρωματικές γωνίες BHN και $\Lambda H\Lambda$). Άρα η ζητούμενη γωνία $\Lambda MN = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

