



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/11/2012

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα . Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Ο αριθμός a είναι το γινόμενο $132 \cdot N$, όπου N θετικός ακέραιος αριθμός. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του N ώστε ο a να είναι τέλει τετράγωνο.

Λύση:

Ο αριθμός a μπορεί να γραφεί στην μορφή $a = 132 \cdot N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot N$. Για να είναι ο a τέλει τετράγωνο, πρέπει ο N να είναι αριθμός της μορφής $N = 3 \cdot 11 \cdot \omega^2$, όπου ω ακέραιος. Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του N είναι $3 \cdot 11 = 33$.

2. Αν $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$, να βρείτε το x .

Λύση:

Αν $2^x = a$ και $3^x = \beta$, τότε

$$\frac{a^3 + \beta^3}{a^2\beta + a\beta^2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{(a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)}{a\beta(a + \beta)} = \frac{7}{6} \Rightarrow 6a^2 - 13a\beta + 6\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 9a\beta - 4a\beta + 6\beta^2 = 0 \Rightarrow 3a(2a - 3\beta) - 2\beta(2a - 3\beta) = 0$$

$$\Rightarrow (2a - 3\beta)(3a - 2\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3\beta}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{2} \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1 \\ a = \frac{2\beta}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$

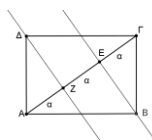
Λύση:

Υποθέτουμε ότι $x = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$, όπου $a = 10 + 4\sqrt{6}$ και $\beta = 10 - 4\sqrt{6}$.

Παρατηρούμε ότι
$$\begin{cases} a + \beta = (10 + 4\sqrt{6}) + (10 - 4\sqrt{6}) = 20 \\ a \cdot \beta = (10 + 4\sqrt{6}) \cdot (10 - 4\sqrt{6}) = 10^2 - 16 \cdot 6 = 4 \end{cases}$$

Άρα, $x^2 = a + \beta - 2\sqrt{a\beta} = 20 - 2\sqrt{4} = 16$. Συνεπώς, $x = 4$, αφού $x > 0$.

4. Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, οι ΔZ και EB είναι κάθετες στην διαγώνιο $A\Gamma$. Αν $AZ = EZ = \Gamma E = \alpha$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του α .



Λύση:

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta Z$ και $A\Delta\Gamma$ για να αποδείξω ότι είναι όμοια.

$\Delta\hat{A}\Gamma$ κοινή γωνιά και $A\hat{\Delta}Z = \Delta\hat{\Gamma}A$ (συμπληρωματικές της $\hat{A}$).

Επομένως,

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AZ}{A\Delta} \Rightarrow \frac{A\Delta}{3\alpha} = \frac{\alpha}{A\Delta} \Rightarrow (A\Delta)^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow A\Delta = \alpha\sqrt{3}$$

Με Π.Θ. στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε ότι $\Gamma\Delta = \alpha\sqrt{6}$.

Άρα, $E(AB\Gamma\Delta) = \alpha\sqrt{3} \cdot \alpha\sqrt{6} = 3\alpha^2\sqrt{2}$.