



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/12/2013

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Ο Ανδρέας αρχίζει να διαβάζει ένα βιβλίο την 1^η Δεκεμβρίου. Κάθε μέρα διαβάζει τον ίδιο αριθμό σελίδων και το τελειώνει την 31^η Δεκεμβρίου του ίδιου χρόνου. Αν όμως αποφάσιζε να διάβαζε την πρώτη μέρα το $\frac{1}{4}$ των σελίδων που διάβαζε και κάθε μέρα που ακολουθούσε διάβαζε μια σελίδα περισσότερη από την προηγούμενη μέρα θα χρειαζόταν ακριβώς τον ίδιο αριθμών ημερών για να τελειώσει το βιβλίο. Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;

Λύση:

Έστω ότι ο Ανδρέας διαβάζει x σελίδες την ημέρα τότε το βιβλίο έχει $31x$ σελίδες.

$$31x = \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}x + 1\right) + \left(\frac{1}{4}x + 2\right) + \left(\frac{1}{4}x + 3\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4}x + 30\right) =$$

$$\text{Τότε } 31x = \frac{31}{4}x + (1 + 2 + 3 + \cdots + 30) = \frac{31}{4}x + \frac{30 \times 31}{2}$$

$$x = 20$$

Το βιβλίο έχει 620 σελίδες.

2. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$A = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{10}, \quad B = 5 + \sqrt{12}, \quad \Gamma = \sqrt{78}, \quad \Delta = 3 + \sqrt{27}, \quad E = \sqrt{48} + \sqrt{3}$$

Λύση

$$3 + \sqrt{3} + \sqrt{10} < 3 + \sqrt{3} + \sqrt{12} = 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3 + 3\sqrt{3} = 3 + \sqrt{27} \quad (1)$$

$$3 + \sqrt{27} = 3 + 3\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} < 3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 \\ = 5 + 2\sqrt{3} = 5 + \sqrt{12} \quad (2)$$

$$5 + \sqrt{12} = \sqrt{25} + \sqrt{12} < \sqrt{27} + \sqrt{12} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{48} + \sqrt{3} \quad (3)$$

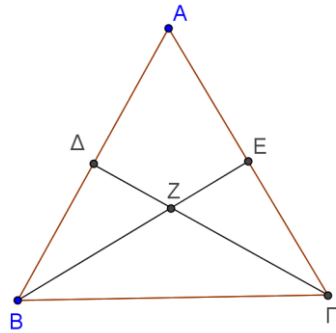
$$\sqrt{48} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \sqrt{75} < \sqrt{78} \quad (4)$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow 3 + \sqrt{3} + \sqrt{10} < 3 + \sqrt{27} < 5 + \sqrt{12} < \sqrt{48} + \sqrt{3} < \sqrt{78}$$

Δηλ. $A < \Delta < B < E < \Gamma$

3. Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου και BE είναι διάμεσος. Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = BE$ και $\angle\Delta\Gamma B = \angle E\Gamma B$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Λύση



Αφού $\angle\Delta\Gamma B = \angle E\Gamma B$ τότε $ZB = Z\Gamma$ ($ZB\Gamma$ ισοσκελές)

Οπότε και $ZE = Z\Delta = BE - ZB = \Delta\Gamma - Z\Gamma$

άρα τα τρίγωνα $\Delta ZB = EZ\Gamma \Rightarrow \angle E\Gamma B = 90^\circ$ και $\angle\Delta BZ = \angle Z\Gamma E$

Και αφού η BE είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου τότε $AB = B\Gamma$

Επίσης επειδή $\angle\Delta BZ = \angle Z\Gamma E \Rightarrow \angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B \Rightarrow AB = A\Gamma$

άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

4. Οι α , β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 11$ και

$$\frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} = \frac{13}{17}. \quad \text{Ποια είναι η τιμή της παράστασης}$$

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta};$$

Λύση:

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+a}+\frac{\gamma}{a+\beta}&=\frac{11-(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}+\frac{11-(\gamma+a)}{\gamma+a}+\frac{11-(a+\beta)}{a+\beta}\\
&=11\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+a}+\frac{1}{a+\beta}\right)-3\\
&=\frac{\mathbf{92}}{\mathbf{17}}
\end{aligned}$$