



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2013

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- 1) Να βρείτε όλους τους διψήφιους αριθμούς $\overline{αβ}$, ώστε ο αριθμός $\overline{αβ} + \overline{βα}$ να είναι δύναμη φυσικού αριθμού.

Λύση

$$\overline{αβ} = 10α + β \quad \text{και} \quad \overline{βα} = 10β + α$$

$$\text{Επομένως έχουμε} \quad \overline{αβ} + \overline{βα} = 10α + β + 10β + α = 11(α + β)$$

Αφού οι αριθμοί $α$ και $β$ είναι ψηφία, τότε δε μπορούν να είναι μεγαλύτεροι του 9, επομένως ο αριθμός $11(α + β)$ μπορεί να γραφτεί ως δύναμη μόνο αν $α + β = 11$, δηλαδή να έχουν άθροισμα ψηφίων 11.

Συνεπώς οι διψήφιοι που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι:

29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

- 2) Ένα καλάθι περιέχει σοκολάτες. Η Μαρία παίρνει το $\frac{1}{2}$ από τις σοκολάτες του καλάθιού και τοποθετεί 15 από τις σοκολάτες που πήρε πίσω στο καλάθι. Στη συνέχεια παίρνει ο Αντρέας το $\frac{1}{2}$ από όσες υπάρχουν στο καλάθι και τοποθετεί πίσω στο καλάθι 10 σοκολάτες από αυτές που πήρε. Αν η Μαρία και ο Αντρέας έχουν τον ίδιο αριθμό σοκολατών, πόσες σοκολάτες έμειναν στο καλάθι;

Λύση

Η Μαρία παίρνει $\frac{x}{2} - 15$ και μένουν στο καλάθι $\frac{x}{2} + 15$.

Ο Αντρέας παίρνει $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 15\right) - 10 = \frac{x}{4} + \frac{15}{2} - 10 = \frac{x}{4} - \frac{5}{2}$

Η Μαρία και ο Αντρέας πήραν ίσο αριθμό σοκολατών άρα

$$\frac{x}{2} - 15 = \frac{x}{4} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 15 - \frac{5}{2}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = 50$$

Αφού η Μαρία πήρε $\frac{x}{2} - 15 = \frac{50}{2} - 15 = 10$ σοκολάτες, πήρε 10 και ο Αντρέας, άρα στο

Καλάθι έμειναν $50 - (10 + 10) = 30$ σοκολάτες

Άλλος τρόπος: Στο καλάθι έμειναν

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 15\right) + 10 = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{2} + 15\right) + 10 = \frac{1}{2} \cdot 40 + 10 = 30$$

3) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa$ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{\kappa - \alpha} + \frac{1}{\kappa - \beta} + \frac{1}{\kappa - \gamma} - \frac{1}{\kappa} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \beta}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)}$$

Λύση

$$\left(\frac{1}{\kappa - \alpha} + \frac{1}{\kappa - \beta}\right) + \left(\frac{1}{\kappa - \gamma} - \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\kappa - \beta + \kappa - \alpha}{(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)} + \frac{\kappa - \kappa + \gamma}{\kappa(\kappa - \gamma)} =$$

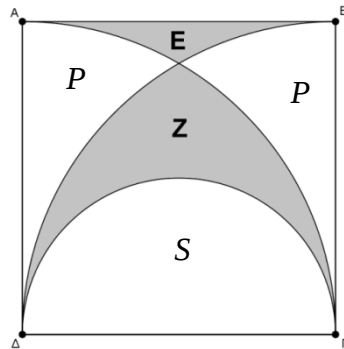
$$\frac{2\kappa - \beta - \alpha}{(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)} + \frac{\gamma}{\kappa(\kappa - \gamma)} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \beta - \alpha}{(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)} + \frac{\gamma}{\kappa(\kappa - \gamma)} =$$

$$\frac{\gamma}{(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)} + \frac{\gamma}{\kappa(\kappa - \gamma)} = \frac{\gamma\kappa(\kappa - \gamma) + \gamma(\kappa - \alpha)(\kappa - \beta)}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)} =$$

$$\frac{\gamma(\kappa^2 - \kappa\gamma + \kappa^2 - \alpha\kappa - \beta\kappa + \alpha\beta)}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)} = \frac{\gamma[2\kappa^2 - \kappa(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta]}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)} =$$

$$\frac{\gamma(2\kappa^2 - 2\kappa^2 + \alpha\beta)}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\kappa(\kappa - \alpha) \cdot (\kappa - \beta)(\kappa - \gamma)}$$

- 4) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Τα τεταρτοκύκλια ΑΓ και ΒΔ έχουν κέντρα τις κορυφές Δ και Γ αντίστοιχα και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι επίσης διάμετρος του ημικυκλίου ΓΔ. Να υπολογίσετε τη διαφορά των εμβαδών των σκιασμένων επιφανειών Ε και Ζ.



Λύση

Το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι: $S = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι: $Q = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$

Στη συνέχεια έχουμε ότι:

$$P + Z + S = Q$$

$$E + Q + P = \alpha^2$$

Αφαιρούμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε:

$$P + Z + S - E - Q - P = Q - \alpha^2$$

$$Z - E = Q + Q - S - \alpha^2$$

$$= 2 \frac{\pi \cdot \alpha^2}{4} - \frac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \alpha^2$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot \alpha^2 - \pi \cdot \alpha^2 - 8\alpha^2}{8} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \alpha^2 - 8\alpha^2}{8}$$

$$Z - E = \frac{(3\pi - 8)\alpha^2}{8}$$