



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/12/2014

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x + y = 4a$, να αποδείξετε ότι

$$x\left(\frac{y-a}{2}\right)^2 + y\left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = a^3$$

Λύση

$$\begin{aligned}x\left(\frac{y-a}{2}\right)^2 + y\left(\frac{x-a}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}x(y^2 - 2ay + a^2) + \frac{1}{4}y(x^2 - 2ax + a^2) \\&= \frac{1}{4}(xy^2 - 2axy + xa^2 + yx^2 - 2axy + ya^2) \\&= \frac{1}{4}[xy(x+y) + a^2(x+y) - 4axy] \\&= \frac{1}{4}(xy \cdot 4a + a^2 \cdot 4a - 4axy) \\&= \frac{1}{4}(4axy + 4a^3 - 4axy) \\&= a^3.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2: Να αποδείξετε ότι σε κάθε έτος υπάρχει τουλάχιστον μια Τρίτη και 13.

Λύση

- Αν η χρονιά δεν είναι δίσεκτη

Έστω ότι 13 Ιανουαρίου είναι ημέρα X . Τότε:

13 Φεβρουαρίου θα είναι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες).

13 Μαρτίου θα είναι και πάλι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 0 ημέρες)

13 Απριλίου θα είναι ημέρα $X + 6$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες)

13 Μαΐου θα είναι ημέρα $X + 8 \rightarrow X + 1$

13 Ιουνίου θα είναι ημέρα $X + 4$

13 Ιουλίου θα είναι ημέρα $X + 6$

13 Αυγούστου θα είναι ημέρα $X + 9 \rightarrow X + 2$

13 Σεπτεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 5$

13 Οκτωβρίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$

13 Νοεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 3$

13 Δεκεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 5$

- Αν η χρονιά είναι δίσεκτη

Έστω ότι 13 Ιανουαρίου είναι ημέρα X . Τότε:

13 Φεβρουαρίου θα είναι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες).

13 Μαρτίου θα είναι και πάλι ημέρα $X + 4$ (μετά από 4 εβδομάδες και 1 ημέρα)

13 Απριλίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες)

13 Μαΐου θα είναι ημέρα $X + 2$

13 Ιουνίου θα είναι ημέρα $X + 5$

13 Ιουλίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$

13 Αυγούστου θα είναι ημέρα $X + 3$

13 Σεπτεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 6$

13 Οκτωβρίου θα είναι ημέρα $X + 8 \rightarrow X + 1$

13 Νοεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 4$

13 Δεκεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 6$

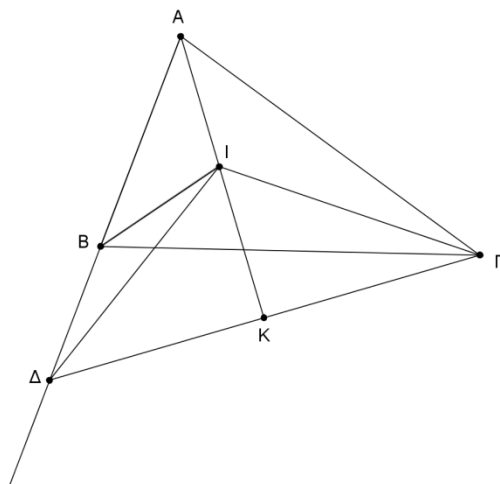
Και στις δυο περιπτώσεις υπάρχουν όλες οι ημέρες:

$X, X + 1, X + 2, X + 3, X + 4, X + 5, X + 6$ και συνεπώς μια τουλάχιστον ημέρα του έτους είναι Τρίτη και 13.

Πρόβλημα 3: Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών B, Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και $AB + BI = A\Gamma$. Στην προέκταση της AB προς το μέρος του B παίρνουμε σημείο Δ , τέτοιο ώστε $B\Delta = BI$. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha) \angle B\Delta I = \frac{\angle A\Gamma B}{2} \quad \text{και} \quad (\beta) \angle A\Gamma B = \frac{\angle AB\Gamma}{2}$$

Λύση



Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $A\Delta = AB + B\Delta = AB + BI = A\Gamma$.

Η AI διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta A\Gamma$, άρα η AK μεσοκάθετος της πλευράς $\Delta\Gamma$.

Άρα και το τρίγωνο $\Delta I\Gamma$ είναι ισοσκελές.

$$(\alpha) \angle B\Delta I = \angle B\Delta\Gamma - \angle I\Delta\Gamma = \angle A\Gamma\Delta - \angle I\Gamma\Delta = \angle A\Gamma I = \frac{\angle A\Gamma B}{2}$$

(β) Από το (α) $\angle A\Gamma B = 2\angle B\Delta I = \angle B\Delta I + \angle B I\Delta = \angle A B I = \frac{\angle A B \Gamma}{2}$, αφού το τρίγωνο $\Delta B I$ είναι ισοσκελές ($B\Delta = B I$) και η $\angle A B I$ εξωτερική του γωνία.

Πρόβλημα 4: Να βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y = 8$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x - y - 8 &= 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 32 = 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 - 34 &= 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 34 \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Θέτουμε $2x - 1 = m, 2y - 1 = n$, όπου m, n ακέραιοι. Η $(\spadesuit)$ γράφεται:

$$m^2 + n^2 = 34 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{34 - n^2} \quad (\diamond)$$

Προφανώς, $34 - n^2 \geq 0 \Leftrightarrow n^2 \leq 34 \Leftrightarrow n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$

Όμως, m ακέραιος. Άρα, οι λύσεις της $(\diamond)$ είναι:

$(3, 5), (3, -5), (-3, 5), (-3, -5), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)$.

Τελικά, για την $(\spadesuit)$ έχουμε τις λύσεις:

$(2, 3), (2, -2), (-1, 3), (-1, -2), (3, 2), (3, -1), (-2, 2), (-2, -1)$