



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2014

Ώρα Εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Υπάρχουν δύο αδέρφια ο Κώστας και ο Γιάννης. Η ηλικία του Κώστα είναι μεταξύ 30 και 40 χρονών, και η ηλικία του Γιάννη, είναι μεταξύ 40 και 50 χρονών. Το γινόμενο των ηλικιών τους είναι τέλειος κύβος. Να βρείτε το άθροισμα των ηλικιών τους.

Προτεινόμενη Λύση

Αφού η ηλικία του Κώστα είναι μεταξύ 30 και 40
και η ηλικία του Γιάννη είναι μεταξύ 40 και 50
τότε το γινόμενο των ηλικιών τους είναι μεταξύ 1200 και 2000
άρα αναζητώ ένα τέλειο κύβο μεταξύ 1200 και 2000

$$10^3 = 1000, 11^3 = 1331, 12^3 = 1728$$

Το 11^3 απορρίπτεται γιατί το 11 είναι πρώτος αριθμός ενώ

$$12^3 = (2^2 \cdot 3)^3 = 2^6 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3^2)(2^4 \cdot 3) = 36 \cdot 48$$

Άρα ο Κώστας είναι 36 χρονών και ο Γιάννης 48 χρονών.

Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι $36 + 48 = 84$

2. Αν $A = 1234567891 \times 1234567896 \times 1234567898$ και

$$B = 1234567899 \times 1234567894 \times 1234567892$$

να υπολογίσετε τη διαφορά $B - A$.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω $\alpha = 1234567895$ τότε

$$A = (\alpha - 4) \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 3) = (\alpha^2 - 3\alpha - 4) \cdot (\alpha + 3) = \alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha^2 - 9\alpha - 4\alpha - 12$$

$$\text{τότε } A = \alpha^3 - 13\alpha - 12$$

$$B = (\alpha + 4) \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 3) = (\alpha^2 + 3\alpha - 4) \cdot (\alpha - 3) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha^2 - 9\alpha - 4\alpha + 12$$

$$\text{τότε } B = \alpha^3 - 13\alpha + 12$$

$$B - A = (\alpha^3 - 13\alpha + 12) - (\alpha^3 - 13\alpha - 12) = \alpha^3 - 13\alpha + 12 - \alpha^3 + 13\alpha + 12 = 24$$

$$\text{Τότε } B - A = 24$$

3. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός διαδοχικών θετικών ακεραιών που όταν προστεθούν δίνουν τον αριθμό 1000. Να γράψετε αυτούς τους αριθμούς.

Προτεινόμενη Λύση

α) Δεν μπορεί να είναι 2 διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι γιατί το άθροισμα τους είναι περιττός αριθμός

β) έστω ότι είναι 3 διαδοχικοί ακέραιοι οι $x, x+1, x+2$ τότε

$$x + (x+1) + (x+2) = 1000 \Leftrightarrow 3x + 3 = 1000 \Leftrightarrow 3x = 997 \Leftrightarrow x = \frac{997}{3}$$

Απορρίπτεται γιατί το x δεν είναι ακέραιος

γ) έστω ότι είναι 4 διαδοχικοί ακέραιοι οι $x, x+1, x+2, x+3$ τότε

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 1000 \Leftrightarrow 4x + 6 = 1000 \Leftrightarrow 4x = 994 \Leftrightarrow x = \frac{994}{4}$$

Απορρίπτεται γιατί το x δεν είναι ακέραιος

δ) έστω ότι είναι 5 διαδοχικοί ακέραιοι οι $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ τότε

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 1000$$

$$5x + 10 = 1000 \Leftrightarrow 5x = 990 \Leftrightarrow x = \frac{990}{5} = 198$$

Άρα υπάρχουν **5** διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι οι οποίοι είναι : 198, 199, 200, 201, 202

4. Στο παρακάτω σχήμα τα δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ είναι ίσα. Η πλευρά ΕΖ διχοτομεί την πλευρά ΓΔ στο σημείο Μ. Αν ΑΒ=8cm και ΜΖ = 2cm, να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας των δύο τριγώνων.

Προτεινόμενη Λύση

Φέρνω την ΑΜ. Δημιουργούνται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ.

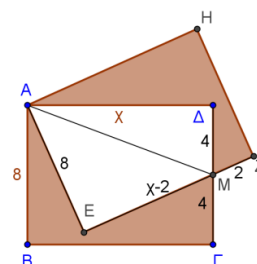
Αν ΑΔ=χ τότε ΕΜ=χ-2 και ΑΕ=8

Στο τρίγωνο ΑΜΔ από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$(AM)^2 = (AD)^2 + (DM)^2 \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΜΕ από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$(AM)^2 = (AE)^2 + (EM)^2 \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) :

$$(AD)^2 + (DM)^2 = (AE)^2 + (EM)^2$$

$$x^2 + 4^2 = 8^2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16 = 64 + x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = 13$$

Εμβαδόν μη σκιασμένης επιφάνειας:

$$E = \frac{(AD) \cdot (DM)}{2} + \frac{(AE) \cdot (EM)}{2} = \frac{13 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 11}{2} = 70 \text{cm}^2$$

Συνεπώς το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι :

$$E_{\Sigma} = 2 \cdot E_{AB\Gamma\Delta} - 2 \cdot E = 2 \cdot 8 \cdot 13 - 2 \cdot 70 = 68 \text{cm}^2$$