



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/12/2015

Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$, να δείξετε ότι:

(α) $\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 = 2(9\gamma^2 - 2\alpha\beta)$

(β) $\alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4 = 2(9\gamma^2 - 2\alpha\beta)^2$

(γ) $(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)^2 = 2(\alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4)$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$. Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = -3\gamma \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)^2 = 9\gamma^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha\beta &= 9\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha\beta + 9\gamma^2 = 2 \cdot 9\gamma^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 &= 2 \cdot 9\gamma^2 - 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 = 2(9\gamma^2 - 2\alpha\beta)\end{aligned}$$

(β) Από το (α) ερώτημα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 4\beta^2 &= 9\gamma^2 - 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha^2 + 4\beta^2)^2 = (9\gamma^2 - 4\alpha\beta)^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + 16\beta^4 + 8\alpha^2\beta^2 &= 81\gamma^4 - 72\alpha\beta\gamma^2 + 16\alpha^2\beta^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4 &= 2 \cdot 81\gamma^4 - 72\alpha\beta\gamma^2 + 8\alpha^2\beta^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4 &= 2(81\gamma^4 - 36\alpha\beta\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2) \\ \Leftrightarrow \alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4 &= 2(9\gamma^2 - 2\alpha\beta)^2\end{aligned}$$

(γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 &= 2(9\gamma^2 - 2\alpha\beta) \Leftrightarrow (\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)^2 = 4(9\gamma^2 - 2\alpha\beta)^2 \\ \Leftrightarrow \underbrace{(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)^2}_{(β)} &= 2(\alpha^4 + 16\beta^4 + 81\gamma^4)\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω Δ, E τυχαία σημεία στις πλευρές $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle ABE$ και $\angle A\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο Z . Να δείξετε ότι:

$$\angle B\Delta\Gamma + \angle BE\Gamma = 2 \cdot \angle BZ\Gamma$$

Προτεινόμενη Λύση

Είναι:

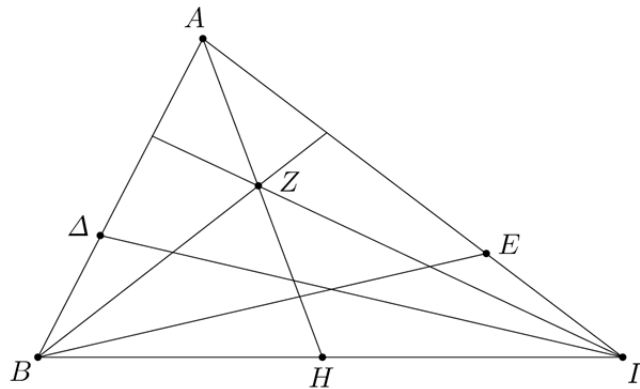
$$\angle B\Delta\Gamma = \angle B\Delta\Gamma + \angle A\Gamma\Delta \quad (1)$$

ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Ομοίως, είναι:

$$\angle BE\Gamma = \angle B\Delta\Gamma + \angle ABE \quad (2)$$

ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ABE .



Από (1) και (2), έχουμε:

$$\angle B\Delta\Gamma + \angle BE\Gamma = 2 \cdot \angle B\Delta\Gamma + \angle A\Gamma\Delta + \angle ABE \quad (3)$$

Φέρουμε την AH που διέρχεται από το σημείο Z . Είναι:

$$\angle BZH = \angle BAZ + \angle ABZ \quad (4)$$

ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ABZ .

Ομοίως, είναι:

$$\angle GZH = \angle ZAG + \angle AGZ \quad (5)$$

ως εξωτερική γωνία του τριγώνου AGZ .

Από (4) και (5), έχουμε:

$$\begin{aligned} \angle BZH + \angle GZH &= \angle BAZ + \angle ZAG + \angle ABZ + \angle AGZ \Leftrightarrow \\ \angle BZ\Gamma &= \angle B\Delta\Gamma + \angle ABZ + \angle AGZ \end{aligned} \quad (6)$$

Όμως, $\angle ABZ = \frac{1}{2} \cdot \angle ABE$ και $\angle AGZ = \frac{1}{2} \cdot \angle A\Gamma\Delta$ (BZ, GZ διχοτόμοι των γωνιών $\angle ABE, \angle A\Gamma\Delta$, αντίστοιχα). Άρα, από (3) και (6) είναι:

$$\angle B\Delta\Gamma + \angle BE\Gamma = 2 \cdot \angle BZ\Gamma$$

Πρόβλημα 3

(α) Αν $f(x) = x^3 - \lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο

$$\varphi(x) = f(x+1) + 2f(x-2) - f(x)$$

να διαιρείται με το $x-1$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $x^3 - 7x + 6 = 0$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Το $x-1$ διαιρεί το πολυώνυμο $\varphi(x)$. Συνεπώς, το 1 είναι ρίζα του $\varphi(x)$, δηλαδή $\varphi(1) = 0$.
Είναι:

$$\varphi(1) = f(2) + 2f(-1) - f(1) = 0 \quad (1)$$

Έχουμε:

- $f(2) = 8 - 2\lambda + 1 = 9 - 2\lambda$
- $f(-1) = -1 + \lambda + 1 = \lambda$
- $f(1) = 1 - \lambda + 1 = 2 - \lambda$

Συνεπώς, από την (1), είναι:

$$9 - 2\lambda + 2\lambda - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -7$$

(β) Α' Τρόπος

Θεωρούμε το πολυώνυμο $\varphi(x) = x^3 - 7x + 6$. Μια προφανής ρίζα του πολυωνύμου αυτού είναι ο αριθμός 1 (δηλαδή $\varphi(1) = 0$). Συνεπώς, το $x-1$ είναι παράγοντας του $\varphi(x)$. Είναι:

$$\varphi(x): (x-1) = x^2 + x - 6 \Leftrightarrow \varphi(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Επομένως, οι άλλες δύο λύσεις της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + x - 6 = 0$. Είναι:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 2$$

Τελικά, οι λύσεις της εξίσωσης $x^3 - 7x + 6 = 0$ είναι οι αριθμοί $-3, 1$ και 2 .

Β' Τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 7x + 7 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - 7(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 7(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } -3 \text{ ή } 2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

Αν x, y, z ακέραιοι αριθμοί, να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 16z = 30$

Προτεινόμενη Λύση

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι x και y είναι είτε και οι δύο άρτιοι, είτε και οι δύο περιττοί.

- Έστω $x = 2k, y = 2m$ με $k, m \in \mathbb{Z}$. Η εξίσωση γράφεται:

$$4k^2 + 4m^2 - 16z = 30 \Leftrightarrow \text{πολ}4 = 30,$$

άτοπο, αφού το 30 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

- Έστω $x = 2k + 1, y = 2m + 1$ με $k, m \in \mathbb{Z}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}(2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 - 16z &= 30 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 - 16z = 30 \\ 4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m - 16z &= 28 \Leftrightarrow k^2 + k + m^2 + m - 4z = 7 \\ \Leftrightarrow k(k + 1) + m(m + 1) - 4z &= 7\end{aligned}$$

άτοπο, αφού το αριστερό μέλος της πιο πάνω εξίσωσης είναι πολλαπλάσιο του 2 (εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $a(a + 1) = \text{πολ}2, a \in \mathbb{Z}$).

Συνεπώς, η εξίσωση $x^2 + y^2 - 16z = 30$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.