



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2015

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\left(\frac{154}{153} + \frac{153}{154}\right)^2 - \left(\frac{153}{154} - \frac{154}{153}\right)^2$

(γ) Να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού: $\left(\frac{5^{2009} + 2^{2008}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^{2009} - 2^{2008}}{2}\right)^2$

Προτεινόμενη Λύση

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad \alpha' \text{ μέρος} &= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta = \beta' \text{ μέρος}\end{aligned}$$

(β) Βάση της προηγούμενης ταυτότητας τότε

$$\left(\frac{154}{153} + \frac{153}{154}\right)^2 - \left(\frac{153}{154} - \frac{154}{153}\right)^2 = 4 \cdot \frac{154}{153} \cdot \frac{153}{154} = 4$$

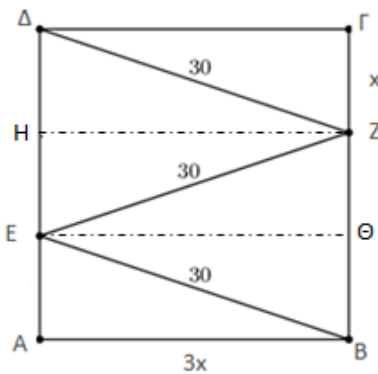
$$\begin{aligned}(\gamma) \quad \left(\frac{5^{2009} + 2^{2008}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^{2009} - 2^{2008}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{5^{2009}}{2} + \frac{2^{2008}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^{2009}}{2} - \frac{2^{2008}}{2}\right)^2 = \\ &= 4 \cdot \frac{5^{2009}}{2} \cdot \frac{2^{2008}}{2} = 5^{2009} \cdot 2^{2008} = 5 \cdot 5^{2008} \cdot 2^{2008} \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 2)^{2008} = 5 \cdot 10^{2008}\end{aligned}$$

Ο αριθμός έχει 2009 ψηφία, 1 πεντάρι και 2008 μηδενικά, άρα το άθροισμα των ψηφίων του είναι 5.

Πρόβλημα 2

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο E βρίσκεται πάνω στην πλευρά AD και το σημείο Z βρίσκεται στην πλευρά $B\Gamma$, έτσι ώστε $BE = EZ = Z\Delta = 30\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

Προτεινόμενη Λύση



Αν φέρουμε τις ZH και $E\Theta$ κάθετες στην AD σχηματίζονται τρία ίσα ορθογώνια .

Αν $\Gamma Z = \Delta H = HE = EA = x$ τότε $AB = 3x$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε

$$(AB)^2 + (AE)^2 = (EB)^2 \quad \text{τότε} \quad (3x)^2 + (x)^2 = 30^2 \quad \text{τότε} \quad 10x^2 = 900 \quad \text{τότε} \quad x^2 = 90$$

$$E = (AB)^2 = (3x)^2 = 9x^2 = 9 \cdot 90 = 810 \quad \text{τότε} \quad E = 810 \text{ τ.μ.}$$

Πρόβλημα 3

Ένα Γυμνάσιο θα διοργανώσει φεστιβάλ χορού στα πλαίσια λειτουργίας των ομίλων. Στο φεστιβάλ χορού θα συμμετέχει το 60% του αριθμού των αγοριών και το 90% του αριθμού των κοριτσιών του σχολείου. Τα αγόρια που θα συμμετέχουν, αν σχηματίσουν τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν σχηματίσουν πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 90% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Προτεινόμενη Λύση

Αν A_x είναι ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στο φεστιβάλ χορού,

τότε ο $A_x = \text{πολ.}3$

και επιπλέον $A_x = \text{πολ.}5 + 3$ και $A_x = \text{πολ.}7 + 3$

άρα $A_x - 3 = \text{πολ.}5$ και $A_x - 3 = \text{πολ.}7$ οπότε ο $A_x - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7, οπότε ο αριθμός θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, άρα θα είναι ένας από τους αριθμούς (35, 70, 105, 140,...).

Άρα ο αριθμός A_x θα είναι κάποιος από τους αριθμούς (38, 73, 108, 143,...)

Αν A είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση θα είναι

$$100 \cdot \frac{60}{100} < A_x = A \cdot \frac{60}{100} < 200 \cdot \frac{60}{100} \quad \text{τότε } 60 < A_x < 120 \quad \text{άρα } A_x = 73 \text{ ή } 108$$

Επειδή όμως ο αριθμός είναι και πολλαπλάσιο του 3, τότε $A_x = 108$.

$$\text{Άρα και το σύνολο των αγοριών του Γυμνασίου είναι } A = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180$$

Τα κορίτσια που πήραν μέρος στο φεστιβάλ αφού είναι διπλάσια από τον αριθμό των αγοριών που συμμετείχαν τότε θα είναι $K_x = 2 \cdot 108 = 216$

$$\text{Άρα τα κορίτσια του σχολείου είναι } K = 216 \cdot \frac{100}{90} = 240$$

Άρα το Γυμνάσιο έχει συνολικά $A + K = 180 + 240 = 420$ μαθητές και μαθήτριες.

Πρόβλημα 4

Έστω x και y θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρείτε το άθροισμα όλων των τιμών του x που

$$\text{ικανοποιούν τη σχέση : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$\text{Αφού } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \quad \text{τότε } \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{7} \quad \text{τότε } 7(y+x) = xy$$

$$7y + 7x - xy = 0 \quad \text{τότε } (x-7)(y-7) - 49 = 0 \quad \text{τότε } (y-7)(x-7) = 49$$

Τότε το $x-7$ διαιρεί το $49 = 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7$

$$\text{άρα } x-7=1 \Rightarrow x=8$$

$$x-7=49 \Rightarrow x=56$$

$$x-7=7 \Rightarrow x=14$$

$$\text{Απάντηση : } 8 + 56 + 14 = 78$$