



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2016

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

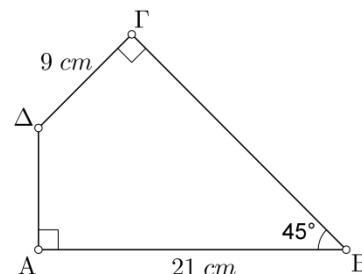
1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

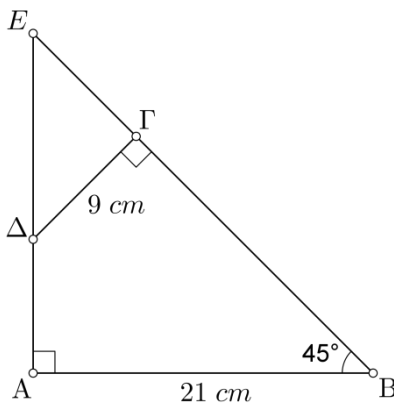
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\angle B\Delta\Delta = \angle B\Gamma\Delta = 90^\circ$, $\angle AB\Gamma = 45^\circ$, $(AB) = 21\text{ cm}$ και $(\Gamma\Delta) = 9\text{ cm}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



Προτεινόμενη Λύση

Προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ προς το μέρος των Δ και Γ, αντίστοιχα, και ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των δύο προεκτάσεων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ, έχουμε $\angle BEA = 45^\circ$. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $(AE) = (AB) = 21\text{ cm}$.

Ομοίως, από το τρίγωνο ΓΔΕ έχουμε $\angle ΓΔΕ = 45^\circ$ και $(ΓΕ) = (\Gamma\Delta) = 9\text{ cm}$.

Άρα,

$$E_{AB\Gamma\Delta} = E_{ABE} - E_{\Gamma\Delta E} = \frac{21 \cdot 21}{2} - \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{(21 - 9)(21 + 9)}{2} = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180\text{ cm}^2$$

Πρόβλημα 2

(α) Να βρείτε σταθερούς πραγματικούς αριθμούς A, B , ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } n$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}$$

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2015 \cdot 2017}$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow A(n+1) + Bn = 1 \\ &\Rightarrow (A+B)n + A = 1 \end{aligned}$$

Δοκιμάζουμε τις τιμές $A = 1, B = -1$. Πράγματι:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } n$$

Άλλος τρόπος

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } n$$

Άρα, $A = 1, B = -1$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση που αποδείξαμε στο (α) ερώτημα για τον κάθε όρο του αθροίσματος S_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2017} = \frac{2016}{2017} \end{aligned}$$

(γ) Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο όπως στο (α) ερώτημα, αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } n$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή για τον κάθε όρο του αθροίσματος S_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2015 \cdot 2017} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2017} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2017} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2016}{2017} = \frac{1008}{2017} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Να γράψετε την παράσταση

$$A = \sqrt{\sqrt{6^6}} - 5 \cdot \sqrt{9 + \sqrt{72}}$$

στη μορφή

$$\sqrt{a} - \sqrt{b},$$

όπου a και b θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε:

$$\sqrt{\sqrt{6^6}} = \sqrt{6^3} = 6\sqrt{6} \quad (1)$$

$$9 + \sqrt{72} = 9 + \sqrt{4 \cdot 18} = 6 + 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην παράσταση A παίρνουμε:

$$A = 6\sqrt{6} - 5 \cdot \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2} = 6\sqrt{6} - 5 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 6\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 5\sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{75}$$

(Το $9 + \sqrt{72} = (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$ μπορεί να βρεθεί δοκιμάζοντας και το $9 + \sqrt{72} = (\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda})^2$, $\kappa, \lambda > 0$, το οποίο καταλήγει σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση.)

Πρόβλημα 4

Αν

$$x = (1 + 7) \cdot (1 + 7^2) \cdot (1 + 7^4) \cdot (1 + 7^8) \cdot (1 + 7^{16}) \cdot (1 + 7^{32})$$

και

$$7^{32} = \sqrt{ax + a - 5},$$

να υπολογίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου αριθμού a .

Προτεινόμενη Λύση

Πολλαπλασιάζοντας με το 6 και τα δύο μέλη της πρώτης σχέσης, παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 6x &= (7 - 1) \cdot (7 + 1) \cdot (1 + 7^2) \cdot (1 + 7^4) \cdot (1 + 7^8) \cdot (1 + 7^{16}) \cdot (1 + 7^{32}) \\ &= (7^2 - 1) \cdot (7^2 + 1) \cdot (1 + 7^4) \cdot (1 + 7^8) \cdot (1 + 7^{16}) \cdot (1 + 7^{32}) \\ &= (7^4 - 1) \cdot (7^4 + 1) \cdot (1 + 7^8) \cdot (1 + 7^{16}) \cdot (1 + 7^{32}) = \dots = 7^{64} - 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{7^{64} - 1}{6} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 7^{32} &= \sqrt{ax + a - 5} \Rightarrow 7^{32} = \sqrt{a \cdot \frac{7^{64} - 1}{6} + a - 5} \Rightarrow 7^{64} = \frac{a}{6} \cdot 7^{64} + \frac{5a}{6} - 5 \\ &\Rightarrow 7^{64} \left(1 - \frac{a}{6}\right) = -5 \left(1 - \frac{a}{6}\right) \Rightarrow 1 - \frac{a}{6} = 0 \Rightarrow a = 6 \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

$$\left. \begin{aligned} 7^{64} &= 6x + 1 \\ 7^{64} &= ax + a - 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6x + 1 = ax + a - 5 \Rightarrow 6x + 6 = ax + a \Rightarrow 6(x + 1) = a(x + 1) \Rightarrow a = 6$$