



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/11/2016

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

(α) Να δείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{x}+y} = \frac{\sqrt{x}-y}{x-y^2}$

(β) Να βρείτε την τιμή του ακέραιου αριθμού n για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 15$$

Προτεινόμενη Λύση:

α) 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}+y} &= \frac{\sqrt{x}-y}{x-y^2} \Leftrightarrow x-y^2 = (\sqrt{x}+y)(\sqrt{x}-y) \Leftrightarrow x-y^2 = (\sqrt{x})^2 - y^2 \\ &\Leftrightarrow x-y^2 = x-y^2\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

$$\frac{1}{\sqrt{x}+y} = \frac{1}{\sqrt{x}+y} \cdot \frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}-y} = \frac{\sqrt{x}-y}{(\sqrt{x})^2 - y^2} = \frac{\sqrt{x}-y}{x-y^2}$$

β) Από το (α) ερώτημα προκύπτει:

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}} = \frac{\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}}{\kappa+1-\kappa} = \sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}, \quad \kappa=1,2,3,\dots,n$$

Άρα:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 15$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 15$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\dots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) - (\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}) = 15$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} = 16 \Leftrightarrow (\sqrt{n+1})^2 = 16^2 \Leftrightarrow n+1 = 256 \Leftrightarrow n = 255$$

Πρόβλημα 2

Ο Πέτρος μπογιατίζει ένα δωμάτιο σε 15 ώρες, ο Γιάννης μπορεί να μπογιατίζει 50% πιο γρήγορα από τον Πέτρο και ο Κώστας μπορεί να μπογιατίζει δυο φορές πιο γρήγορα από τον Πέτρο. Ο Πέτρος ξεκινά να μπογιατίζει το δωμάτιο και για μια ώρα και 30 λεπτά δουλεύει μόνος του. Μετά έρχεται ο Γιάννης και μαζί με το Πέτρο δουλεύουν μαζί μέχρι που μπογιατίζουν το μισό δωμάτιο. Στην συνέχεια έρχεται ο Κώστας και συνεχίζουν όλοι μαζί να δουλεύουν μέχρι να μπογιατίσουν το δωμάτιο. Να βρείτε από την ώρα που ξεκίνησε ο Πέτρος, πόσα συνολικά λεπτά χρειάστηκαν και οι τρεις να τελειώσουν το βάψιμο του δωματίου.

Προτεινόμενη Λύση

Ο Πέτρος μπογιατίζει το $\frac{1}{15}$ του δωματίου σε μια ώρα

Ο Γιάννης μπογιατίζει το $\frac{1}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{50}{100} = \frac{3}{2 \cdot 15} = \frac{1}{10}$ του δωματίου σε μια ώρα

Ο Κώστας μπογιατίζει το $2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ του δωματίου σε μια ώρα

Αρχικά ο Πέτρος δουλεύει μόνος του για $\frac{3}{2}$ ώρες με ρυθμό $\frac{1}{15}$ του δωματίου ανά ώρα άρα

μπογιατίζει $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ του δωματίου

Αργότερα δουλεύουν μαζί ο Πέτρος και ο Γιάννης και μπογιατίζουν $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ του δωματίου με

ρυθμό $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2+3}{30} = \frac{1}{6}$ του δωματίου ανά ώρα, άρα δουλεύουν για $\frac{\frac{4}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{5}$ ώρες

Και οι τρεις μαζί πρέπει να μπογιατίσουν το υπόλοιπο $\frac{1}{2}$ του δωματίου με ρυθμό

$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{2+3+4}{30} = \frac{3}{10}$, άρα δουλεύουν μαζί για $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{3}$ ώρες

Τελικά θα χρειαστεί να δουλέψουν συνολικά για $\frac{3}{2} + \frac{12}{5} + \frac{5}{3} = \frac{45+72+50}{30} = \frac{167}{30}$ ώρες ή

$\frac{167}{30} \cdot 60 = 334$ λεπτά

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, x με $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \neq 0$ που ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} = \frac{a^2}{\alpha + \gamma} + 35, \quad \frac{\beta^2}{\beta + \gamma} = \frac{\beta^2}{\beta + \alpha} + 11 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma^2}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta} + x$$

Να υπολογίσετε τη τιμή του x .

Προτεινόμενη Λύση

$$\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} = \frac{a^2}{\alpha + \gamma} + 35 \quad \text{τότε} \quad \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} - \frac{a^2}{\alpha + \gamma} = 35 \quad (1)$$

$$\frac{\beta^2}{\beta + \gamma} = \frac{\beta^2}{\beta + \alpha} + 11 \quad \text{τότε} \quad \frac{\beta^2}{\beta + \gamma} - \frac{\beta^2}{\beta + \alpha} = 11 \quad (2)$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta} + x \quad \text{τότε} \quad \frac{\gamma^2}{\gamma + \alpha} - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta} = x \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και **(3)** και προκύπτει

$$\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} - \frac{a^2}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta^2}{\beta + \gamma} - \frac{\beta^2}{\beta + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\gamma + \alpha} - \frac{\gamma^2}{\gamma + \beta} = 35 + 11 + x$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 - a^2}{\gamma + \alpha} = 35 + 11 + x$$

$$\frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} + \frac{(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)}{\beta + \gamma} + \frac{(\gamma - a)(\gamma + a)}{\gamma + \alpha} = 35 + 11 + x$$

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - a) = 35 + 11 + x$$

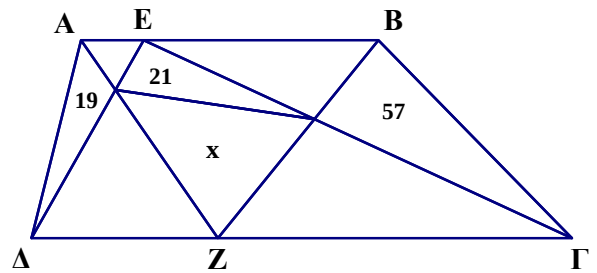
$$\alpha - \beta + \beta - \gamma + \gamma - a = 35 + 11 + x$$

$$0 = 35 + 11 + x$$

$$\text{Τότε } x = -46$$

Πρόβλημα 4

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται $AB \parallel \Delta\Gamma$, E και Z σημεία των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Τα AZ , BZ , $E\Delta$ και $E\Gamma$ είναι ευθύγραμμα τμήματα και οι αριθμοί 19, 21, x και 57 που βρίσκονται μέσα στα τρίγωνα αντιπροσωπεύουν τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων. Να βρείτε την τιμή του x .



Προτεινόμενη Λύση

Αφού $AB \parallel \Delta\Gamma$ τότε $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο. Έστω $υ$ το ύψος του τραpezίου.

$$E_{ABZ} = \frac{(AB) \cdot υ}{2}, \quad E_{\Delta E \Gamma} = \frac{(\Delta\Gamma) \cdot υ}{2}$$

$$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{(AB + \Delta\Gamma) \cdot υ}{2} = \frac{(AB) \cdot υ}{2} + \frac{(\Delta\Gamma) \cdot υ}{2} = E_{ABZ} + E_{\Delta E \Gamma} \quad (1)$$

Από το πιο πάνω σχήμα παρατηρούμε ότι το κοινό μέρος των τριγώνων ABZ και $\Delta E \Gamma$ έχει εμβαδόν $21 + x$.

Επίσης από το σχήμα

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 19 + E_{AZB} + E_{\Delta E \Gamma} - (21 + x) + 57 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει: $E_{ABZ} + E_{\Delta E \Gamma} = 19 + E_{AZB} + E_{\Delta E \Gamma} - (21 + x) + 57$

$$\text{τότε} \quad 0 = 19 - 21 - x + 57$$

$$\text{Τότε} \quad x = 55$$