



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

- (α) Να δείξετε ότι ο $A = \sqrt{342225} + \sqrt[3]{74088}$ είναι φυσικός αριθμός τον οποίο και να υπολογίσετε.
- (β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $B = \sqrt{17 - 6\sqrt{8}}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\kappa + \lambda\sqrt{2}$ για κατάλληλες τιμές ακεραίων κ, λ .

Προτεινόμενες Λύσεις:

- (α) Αναλύοντας σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 342225 και 74088 έχουμε:
- $$342225 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \text{ και } 74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{342225} + \sqrt[3]{74088} = \sqrt{3^4 \cdot 5^2 \cdot 13^2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3} \\ &= \sqrt{(3^2)^2 \cdot (5)^2 \cdot (13)^2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = 9 \cdot 5 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 7 = 585 + 42 \\ &= 627 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad B &= \sqrt{17 - 6\sqrt{8}} = \sqrt{17 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

αφού $3 - 2\sqrt{2} > 0$. Άρα $\kappa = 3, \lambda = -2$.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y) έτσι ώστε να ισχύει:

$$x^2 - 2xy - 8y^2 = 40$$

Προτεινόμενες Λύσεις:

Με συμπλήρωση τέλειου τετραγώνου έχουμε,

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 8y^2 = 40 &\Rightarrow (x - y)^2 - 9y^2 = 40 \Rightarrow (x - y - 3y)(x - y + 3y) = 40 \Rightarrow \\ &(x - 4y)(x + 2y) = 40 \end{aligned}$$

Αφού $x, y > 0$ και $x - 4y < x + 2y$ έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow 6y = 39 \Rightarrow y = \frac{13}{2} \notin \mathbb{N} \text{ (απορρίπτεται)}$
- $\begin{cases} x - 4y = 2 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow y = 3, x = 14 \text{ (δεκτή λύση)}$
- $\begin{cases} x - 4y = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 6y = 6 \Rightarrow y = 1, x = 8 \text{ (δεκτή λύση)}$
- $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow 6y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \text{ (απορρίπτεται)}$

Επομένως τα ζεύγη θετικών λύσεων της εξίσωσης είναι: $(14, 3)$ και $(8, 1)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E, Z στις πλευρές AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα ώστε $(AE) = 3(EB)$ και $(BZ) = (\Gamma Z)$. Να δείξετε ότι η ΔZ διχοτομεί την γωνία $E\Delta\Gamma$.

Προτεινόμενη Λύση

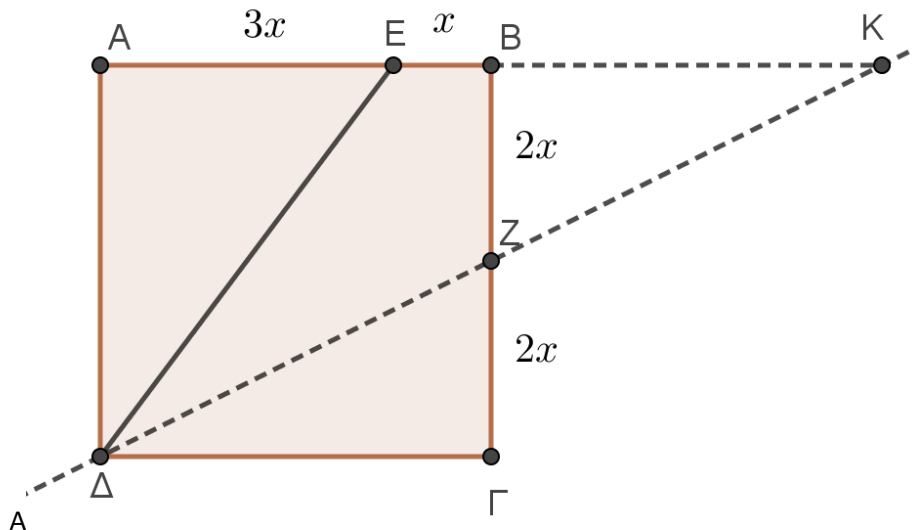
Προεκτείνουμε τις ευθείες ΔZ και AB οι οποίες τέμνονται στο K . Για να δείξουμε ότι η ΔZ διχοτομεί τη γωνία $E\Delta\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $Z\Delta\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι ίσες. Επειδή οι γωνίες BKZ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών AK και $\Gamma\Delta$ αρκεί να δείξουμε ότι $EK = E\Delta$. Έστω $BE = x$ και $AE = 3x$. Έχουμε $BK = \Gamma\Delta = 4x$ (λόγω συμμετρίας, αφού Z μέσο της $B\Gamma$ ή διότι τα ορθογώνια τρίγωνα BZK και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα μεταξύ τους).

Έχουμε $EK = EB + BK = x + 4x = 5x$.

Το $E\Delta$ το υπολογίζουμε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$. Έτσι

$$E\Delta = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = \sqrt{9x^2 + 16x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x.$$

Επομένως $EK = E\Delta$.



Πρόβλημα 4

(α) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + 2} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2018\sqrt{2019} + 2019\sqrt{2018}}$$

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$B = \frac{1}{\sqrt{3} + 3} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2017\sqrt{2019} + 2019\sqrt{2017}}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$(α) \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}$$

(β) Για τον υπολογισμό του A χρησιμοποιούμε το πιο πάνω αποτέλεσμα και έχουμε,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2} + 2} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2018\sqrt{2019} + 2019\sqrt{2018}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2018}} - \frac{1}{\sqrt{2019}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2019}} \end{aligned}$$

(γ) Όπως και στο (α) ερώτημα έχουμε με όμοιο τρόπο ότι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{(n+2)\sqrt{n} - n\sqrt{n+2}} = \\ &= \frac{2}{(n+2)\sqrt{n} - n\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Έτσι για τον υπολογισμό του B έχουμε,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{3} + 3} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2017\sqrt{2019} + 2019\sqrt{2017}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2017}} - \frac{1}{\sqrt{2019}}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2019}}\right) \end{aligned}$$