



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν $A = \sqrt{2} - \sqrt{8}$ και $B = \sqrt{27} - \sqrt{3}$:

α) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $B^2 - A^2$

β) να δείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{B^4 - A^4}{\sqrt{5}}$ και $\frac{1}{\sqrt{5}[(A-B)^2 + (A+B)^2]}$ είναι αντίστροφοι.

Λύση:

$$\begin{aligned} B^2 - A^2 &= (\sqrt{27} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 \\ &= (\sqrt{27})^2 - 2 \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - (\sqrt{8})^2 \\ &= 27 - 2\sqrt{81} + 3 - 2 + 2\sqrt{16} - 8 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B^4 - A^4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}[(A-B)^2 + (A+B)^2]} &= \\ \frac{(B^2 - A^2)(B^2 + A^2)}{\sqrt{25}} \cdot \frac{1}{2(B^2 + A^2)} &= \frac{B^2 - A^2}{10} = 1 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Έστω x ο τριψήφιος αριθμός $AB\Gamma$ και y ο τριψήφιος αριθμός ΓBA . Τα ψηφία A και Γ δεν είναι 0. Αν $x - y = 495$, πόσες είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις για τον αριθμό x ;

Λύση:

$$x = AB\Gamma = 100A + 10B + \Gamma, \quad y = \Gamma BA = 100\Gamma + 10B + A$$

Άρα,

$$495 = x - y = 99A - 99\Gamma = 99(A - \Gamma) \Rightarrow A - \Gamma = 5$$

Τα πιθανά ζεύγη (A, Γ) είναι:

$$(6,1), (7,2), (8,3), (9,4)$$

Δεν έχουμε κανένα περιορισμό για το ψηφίο B . Δηλαδή, για κάθε ένα από τα πιο πάνω ζεύγη έχουμε 10 επιλογές για το ψηφίο B (0, 1, 2, ..., 9). Π.χ. για το ζεύγος (6,1) έχουμε 10 πιθανές περιπτώσεις για τον αριθμό x : 601, 611, 621, ..., 691. Ομοίως και για τα άλλα τρία ζεύγη. Συνολικά υπάρχουν $10 \cdot 4 = 40$ δυνατές περιπτώσεις για τον αριθμό x .

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, $AB = 3A\Delta$, $\Delta\Gamma = 2A\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$, και οι διχοτόμοι των οξείων γωνιών του τραπέζιου τέμνονται στο σημείο M . Τι μέρος του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABM ;

Λύση:

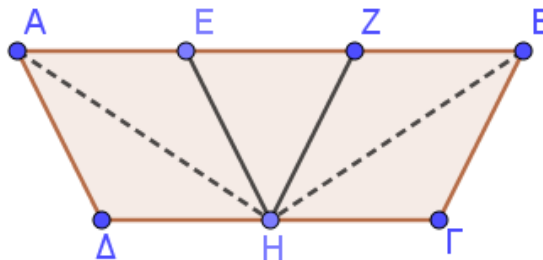
$$AB = 3A\Delta \text{ άρα } AE = EZ = ZB = A\Delta, \\ \Delta\Gamma = 2A\Delta \text{ άρα } \Delta H = H\Gamma = A\Delta$$

$AE \parallel \Delta H$ άρα $AE\Delta H$ παραλληλόγραμμο άρα $A\Delta = EH$.

$AEH\Delta$ έχει 4 πλευρές ίσες άρα ρόμβος,

$ZB \parallel H\Gamma$ άρα $BZH\Gamma$ παραλληλόγραμμο άρα $ZH = B\Gamma$.

$BZH\Gamma$ έχει 4 πλευρές ίσες άρα ρόμβος,



Οι διχοτόμοι στον ρόμβο είναι και διαγώνιοι άρα το σημείο τομής των διχοτόμων είναι το M το οποίο ταυτίζεται με το σημείο H

Τα τρίγωνα $A\Delta H$, AEH , HZB , $H\Gamma B$, EHZ έχουν το ίδιο εμβαδόν αφού έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος

Το AHB αποτελείτε από 3 τρίγωνα ενώ το $AB\Gamma\Delta$ από 5 τρίγωνα άρα το εμβαδόν του

$$E_{(AHB)} = \frac{3}{5} E_{(AB\Gamma\Delta)}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με τις γωνίες B και Δ να είναι ορθές. Με κέντρα τα A και Γ και ακτίνες AB και ΓB γράφουμε τόξα $B\Delta$ που τέμνουν το $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι $(EZ)^2 = 2(AZ) \cdot (\Gamma E)$

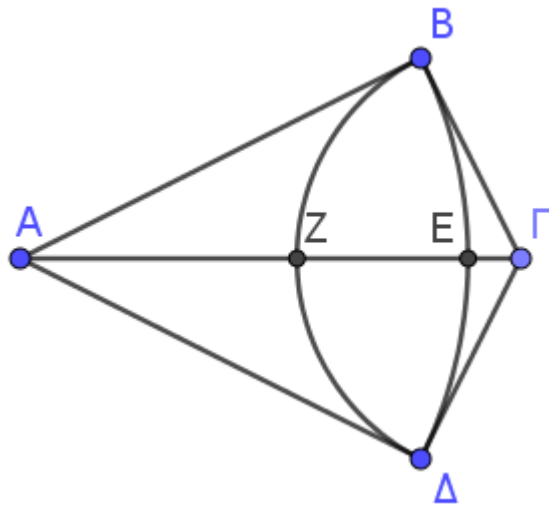
β) Αν $\Gamma E = \alpha$ και Z μέσο της AE να βρεθεί το Εμβαδόν και η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει του α .

Λύση:

Με κέντρο A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο $B\Delta \Rightarrow AB = A\Delta$

Με κέντρο Γ και ακτίνα ΓB γράφουμε τόξο $B\Delta \Rightarrow \Gamma B = \Gamma\Delta$

Είναι γνωστό ότι B και Δ ορθές



$AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο. Ισχύει το Π.Θ

$$\begin{aligned}(A\Gamma)^2 &= (AB)^2 + (B\Gamma)^2 \\ (AZ + ZE + E\Gamma)^2 &= (AZ + ZE)^2 + (ZE + E\Gamma)^2 \\ (AZ)^2 + (ZE)^2 + (E\Gamma)^2 + 2(AZ)(ZE) + 2(AZ)(E\Gamma) + 2(ZE)(E\Gamma) \\ &= (AZ)^2 + 2(AZ)(ZE) + (ZE)^2 + (ZE)^2 + 2(ZE)(E\Gamma) + (E\Gamma)^2 \\ (ZE)^2 &= 2(AZ)(E\Gamma)\end{aligned}$$

Z μέσο AE άρα $ZE = AZ$

Από την σχέση (1) $(ZE)^2 = 2(ZE)(E\Gamma) \Rightarrow (ZE) = 2(E\Gamma) \Rightarrow ZE = 2\alpha \Rightarrow AZ = 2\alpha$

$AB = AE \Rightarrow AB = AZ + ZE = 4\alpha$ και $\Gamma B = \Gamma Z = ZE + E\Gamma = 3\alpha$

$$\Pi_{AB\Gamma\Delta} = 2(AB) + 2(\Gamma B) = 2(4\alpha) + 2(3\alpha) = 14\alpha$$

$$E_{(AB\Gamma\Delta)} = 2E_{(AB\Gamma)} = 2(AB)(B\Gamma)/2 = (4\alpha)(3\alpha) = 12\alpha \text{ τ.μ}$$