



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2019

Ώρα Εξέτασης: 14:00-16:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει $(x+1)^3 - 16x = (2x-1)^2 - 9$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{x}{x-3} + \frac{5}{x+3}$$

Προτεινόμενη λύση

$(x+1)^3 - 16x = (2x-1)^2 - 9$ τότε $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 16x = 4x^2 - 4x + 1 - 9$ τότε

$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ τότε $x^2(x-1) - 9(x-1) = 0$ τότε $(x-1)(x^2 - 9) = 0$ τότε

$(x-1)(x-3)(x+3) = 0$ τότε $x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = -3$

Η παράσταση A ορίζεται μόνο για $x = 1$ έτσι $A = \frac{1}{1-3} + \frac{5}{1+3} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{-2+5}{4} = \frac{3}{4}$

τότε $A = \frac{3}{4}$

Πρόβλημα 2

Αν $A = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8} + \dots$ και $B = 4^{-1} + 4^{-3} + 4^{-5} + 4^{-7} + \dots$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{A}{B}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8} + \dots}{4^{-1} + 4^{-3} + 4^{-5} + 4^{-7} + \dots} = \frac{2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8} + \dots}{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} + \dots} \\&= \frac{(2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} \dots) + (2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + 2^{-16} \dots)}{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} + \dots} \\&= \frac{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} \dots}{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} + \dots} + \frac{2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + 2^{-16} \dots}{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} + \dots} \\&= 1 + \frac{2^{-2} \cdot (2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} \dots)}{2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} + \dots} = 1 + 2^{-1} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Τότε $\frac{A}{B} = \frac{5}{4}$

Πρόβλημα 3

Έστω x και y διψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί όπου ο y προκύπτει με αντιστροφή των ψηφίων του x . Αν οι x και y ικανοποιούν τη σχέση $x^2 - y^2 = m^2$ για κάποιους θετικούς ακέραιους m να βρείτε το άθροισμα των x , y και m .

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x = \overline{a\beta} = 10a + \beta$ τότε $y = \overline{\beta a} = 10\beta + a$ με $a, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ τότε

Αφού $x^2 - y^2 = m^2$ τότε $(10a + \beta)^2 - (10\beta + a)^2 = m^2$ τότε

$$(10a + \beta + 10\beta + a) \cdot (10a + \beta - 10\beta - a) = m^2 \quad \text{τότε}$$

$$(11a + 11\beta) \cdot (9a - 9\beta) = m^2$$

$$11 \cdot 9 \cdot (a + \beta) \cdot (a - \beta) = m^2$$

Αφού m θετικός ακέραιος τότε το m^2 πρέπει να αναλύεται σε γινόμενο τετραγώνων.

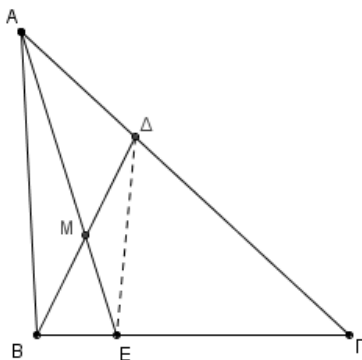
Το $9 = 3^2$ άρα ο ένας από τους παράγοντες $a + \beta$ ή $a - \beta$ πρέπει να είναι ίσος με 11 και ο άλλος ή 1 ή 9. Τα ζεύγη $(9, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5)$ δίνουν άθροισμα 11 αλλά μόνο το $(6, 5)$ δίνει διαφορά 1. Άρα αν $x = 65$ ο $y = 56$ και $m = 11 \cdot 3 = 33$

Τότε το άθροισμα $x + y + m = 65 + 56 + 33 = 154$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στην $A\Gamma$ έτσι ώστε $\Gamma\Delta = 2 \cdot A\Delta$. Αν M μέσο της $B\Delta$ και η AM τέμνει την $B\Gamma$ στο E , να βρείτε το λόγο της BE προς την $B\Gamma$.

Προτεινόμενη λύση



Αφού $BM = M\Delta$ τότε $E_{ABM} = E_{AM\Delta} = \alpha$ και $E_{BEM} = E_{EM\Delta} = \beta$

άρα και $E_{BAE} = \alpha + \beta$ και $E_{AE\Delta} = \alpha + \beta$

Αφού $\Gamma\Delta = 2 \cdot A\Delta$ τότε $E_{\Gamma E\Delta} = 2 \cdot E_{E\Delta A}$ τότε $E_{\Gamma E\Delta} = 2(\alpha + \beta)$ και $E_{BA\Gamma} = 4(\alpha + \beta)$

$$\text{Τότε } \frac{E_{BAE}}{E_{BA\Gamma}} = \frac{(BE) \cdot v}{(B\Gamma) \cdot v} \quad \text{τότε} \quad \frac{(BE) \cdot v}{(B\Gamma) \cdot v} = \frac{\alpha + \beta}{4 \cdot (\alpha + \beta)} \quad \text{τότε} \quad \frac{(BE)}{(B\Gamma)} = \frac{1}{4}$$