



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2006-07

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

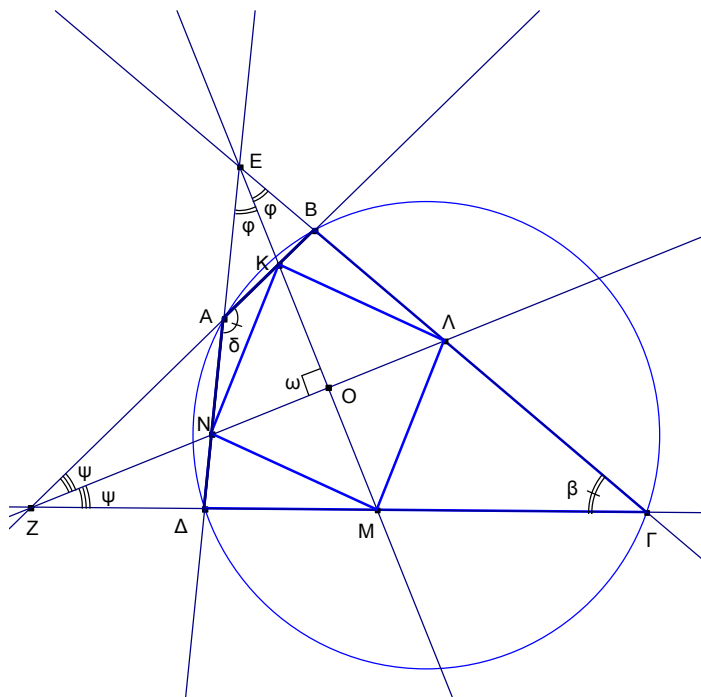
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, που δεν έχει παράλληλες πλευρές, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι πλευρές του $\Delta A, \Gamma B$ τέμνονται στο E και οι πλευρές του $BA, \Gamma\Delta$ τέμνονται στο Z .

Αν οι διχοτόμοι των $\angle DE\Gamma$ και $\angle GZB$ τέμνουν τις πλευρές του τετραπλεύρου στα σημεία K, Λ, M, N να αποδείξετε ότι

- α) οι δυο διχοτόμοι τέμνονται κάθετα
 β) τα σημεία K, Λ, M, N είναι κορυφές ρόμβου.

ΛΥΣΗ



- (α) Από τα τετράπλευρα $OEAZ$ και $OZ\Gamma E$ έχουμε:

$\omega + \varphi + (360^\circ - \delta) + \psi = 360^\circ$ και $(360^\circ - \omega) + \psi + \beta + \varphi = 360^\circ$. Αφαιρώντας τις δύο ισότητες παίρνουμε: $2\omega = \beta + \delta$. Επειδή όμως το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχουμε $2\omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = 90^\circ$.

- (β) Τα τρίγωνα ZMO και ZOK είναι ίσα. Επίσης τα τρίγωνα EON και $EO\Lambda$ είναι ίσα. Άρα $OM = OK$ και $OL = ON$. Οι διχοτόμοι του τετραπλεύρου $K\Lambda M N$ διχοτομούνται

και τέμνονται κάθετα άρα είναι ρόμβος.

2. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των φυσικών αριθμών, που ικανοποιούν την εξίσωση $pq + x^2 = y^2$, όπου p, q θετικοί πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2.

ΛΥΣΗ

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p < q$.

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - x^2 = pq \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = pq.$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε τα συστήματα:

$$\begin{cases} y - x = p \\ y + x = q \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x = q \\ y + x = p \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = pq \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x = pq \\ y + x = 1 \end{cases}.$$

Λύνοντας τα συστήματα έχουμε:

$$\begin{cases} y = \frac{p+q}{2} \\ x = \frac{q-p}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{p+q}{2} \\ x = \frac{p-q}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{1+pq}{2} \\ x = \frac{qp-1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{1+pq}{2} \\ x = \frac{1-qp}{2} \end{cases}.$$

Από την υπόθεση $p < q$ και $x \in \mathbb{N}$ έχουμε $x = \frac{p-q}{2}$ απορίπτεται.

Επίσης επειδή $p, q > 2$ $x = \frac{1-pq}{2} < 0$ απορίπτεται.

$$\text{Άρα οι μόνες δεκτές λύσεις είναι } \begin{cases} y = \frac{p+q}{2} \\ x = \frac{q-p}{2} \end{cases} \text{ και } \begin{cases} y = \frac{1+pq}{2} \\ x = \frac{qp-1}{2} \end{cases}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι φυσικοί αριθμοί. Επειδή $p, q > 2$ είναι πρώτοι αριθμοί αυτοί είναι περιττοί άρα $p+q$ και $q-p$ είναι άρτιοι, άρα

$$y = \frac{p+q}{2}, x = \frac{q-p}{2} \in \mathbb{N}, \text{ δεκτές λύσεις.}$$

Επίσης, επειδή pq περιττός αριθμός τότε $pq+1$ και $pq-1$ είναι άρτιοι, άρα

$$x = \frac{1+pq}{2}, y = \frac{pq-1}{2} \in \mathbb{N}, \text{ δεκτές λύσεις.}$$

3. Να βρείτε τους συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και τις ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$), αν γνωρίζουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, \alpha, \beta, \gamma, x_2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (1)$$

Αν δ είναι η διαφορά της προόδου τότε οι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου γράφονται:

$$x_1 = \beta - 2\delta, \quad \alpha = \beta - \delta, \quad \gamma = \beta + \delta, \quad x_2 = \beta + 2\delta \quad (2)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 2\beta, \quad x_1 x_2 = \beta^2 - 4\delta^2 \quad (3)$$

Οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν $-\frac{\beta}{\alpha} = 2\beta$ και $\beta^2 - 4\delta^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ οι οποίες λόγω των (2)

$$\text{γίνονται } \beta \left(\frac{1}{\beta - \delta} + 2 \right) = 0 \quad \text{και} \quad \beta^2 - 4\delta^2 = \frac{\beta + \delta}{\beta - \delta} \quad (4)$$

Έστω $\beta \neq 0$. Τότε η πρώτη από τις (4) δίνει $\frac{1}{\beta - \delta} + 2 = 0 \Leftrightarrow \delta = \beta + \frac{1}{2}$ και τότε η

$$\text{δεύτερη από τις (4) δίνει } \beta^2 - 4 \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{2\beta + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \beta^2 - (2\beta + 1)^2 = -4\beta - 1 \Leftrightarrow \beta = 0$$

που είναι αντίφαση. Άρα $\beta = 0$ και η δεύτερη από τις (4) δίνει $\delta = \pm \frac{1}{2}$.

■ Αν $\beta = 0$ και $\delta = \frac{1}{2}$ από τις (2) έχουμε $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$

■ Αν $\beta = 0$ και $\delta = -\frac{1}{2}$ από τις (2) έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$

Άρα: $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$ και $(x_1, x_2) = (-1, 1)$
ή

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{και} \quad (x_1, x_2) = (1, -1).$$

4. Πενήντα άτομα, εικοσιπέντε αγόρια και εικοσιπέντε κορίτσια κάθονται γύρω από ένα τραπέζι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα 50, που κάθεται μεταξύ δυο κοριτσιών.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο την εις άτοπο απαγωγής, υποθέτουμε ότι κανένα άτομο δεν κάθεται μεταξύ δύο κοριτσιών.

Ονομάζουμε *μπλόκ* κάθε ομάδα κοριτσιών (αγοριών) που κάθονται ο ένας μετά τον άλλο και από τις δύο πλευρές περικλείονται από αγόρια (κορίτσια).

Με αυτή την υπόθεση τα δυνατά *μπλόκ κοριτσιών* που μπορούν να σχηματιστούν για να καθίσουν με αυτό τον τρόπο είναι:

ΑΚΑ ή ΑΚΚΑ. Άρα κάθε *μπλόκ κοριτσιών* έχει το πολύ 2 κορίτσια και υπάρχουν τουλάχιστον δυο αγόρια στα κενά ανάμεσα σε δυο συνεχόμενα *μπλόκ κοριτσιών* για παράδειγμα ΑΚΚΑ-ΑΚΚΑ-ΑΚΚΑ κ.λ.π Στις θέσεις που υπάρχει η γραμμή πρέπει υποχρεωτικά να καθίσει αγόρι.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil = 13$ *μπλόκ κοριτσιών* και τουλάχιστον

$2 \cdot 13$ αγόρια κάθονται ανάμεσα των δεκατριών κενών των *μπλόκ των κοριτσιών*.

Αλλά μόνο 25 αγόρια υπάρχουν, άτοπο. Επομένως η υπόθεσή μας είναι λάθος.

Επομένως υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα 50, που κάθεται μεταξύ δυο κοριτσιών.

5. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x + \epsilon \phi x - 2x$ είναι αύξουσα στο

διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- β) Αν α είναι η πλευρά ενός κανονικού 2006-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο περιμέτρου L και β είναι η πλευρά ενός κανονικού 2006-γώνου

περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta \geq \frac{L}{1003}$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) f'(x) = \sigma \upsilon \nu x + \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} - 2 \geq \sigma \upsilon \nu x + \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} - 2 = \frac{(1 - \sigma \upsilon \nu x)^2}{\sigma \upsilon \nu x}.$$

$$\text{Επειδή } 0 < \sigma \upsilon \nu x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f \text{ αύξουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

β)

$$f \text{ αύξουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \eta\mu x + \epsilon\phi x - 2x \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) : (1)$$

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{2006} = \frac{\pi}{1003} \quad \text{και} \quad \angle AON = \frac{\pi}{2006}$$

Έστω $(AB) = \alpha$ και $(A'B') = \beta$. Τότε

$$\eta\mu \frac{\pi}{2006} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{R} \Rightarrow \alpha = 2R \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2006} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi \frac{\pi}{2006} = \frac{\frac{\beta}{2}}{R} \Rightarrow \beta = 2R \cdot \epsilon\phi \frac{\pi}{2006}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha + \beta \geq \frac{L}{1003}$ ή

$$2R \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2006} + 2R \cdot \epsilon\phi \frac{\pi}{2006} \geq \frac{2\pi R}{1003} \quad \text{ή}$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{2006} + \epsilon\phi \frac{\pi}{2006} - \frac{2\pi}{2006} \geq 0 \quad \text{που ισχύει, λόγω της (1) για } x = \frac{\pi}{2006}.$$

