



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 15/12/07

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλέ ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Για την ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και ισχύει

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο 0

με $f(0) = 2$ και ισχύει $f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{4}\right) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ και την ΒΕ κάθετη στην ΑΓ (Ε σημείο της ΑΓ). Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Μ και την ΔΓ στο Ζ και η κάθετος από το Γ στην ΒΖ τέμνει τη ΒΖ στο Ν και την ΒΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΕΝ και ΜΚ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

5. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καλύπτεται από τρίγωνο ΚΛΜ.

Να αποδείξετε ότι $\text{Εμβ}(ΑΒΓΔ) \leq \frac{1}{2} \text{Εμβ}(ΚΛΜ)$.



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Για την ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n \in N^*}$ είναι $\alpha_n > 0$, $\forall n \in N^*$ και ισχύει

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in N^*.$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n^2$, $\forall n \in N^*$.

ΛΥΣΗ

Είναι $\forall n \in N^*$,

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= [\alpha_1^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2] - [\alpha_1^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2] \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} - \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\ &= \frac{(2n-1)[n(2n+1) - (n-1)(2n-3)]}{3} \\ &= \frac{(2n-1)(6n-3)}{3} \\ &= (2n-1)^2 \end{aligned}$$

Άρα και αφού $\alpha_n > 0$, $\forall n \in N^*$, είναι $\alpha_n = 2n-1$, $\forall n \in N^*$.

Έτσι, διαδοχικά έχουμε:

$\alpha_1 = 2 \cdot 1 - 1$, $\alpha_2 = 2 \cdot 2 - 1$, ..., $\alpha_n = 2n - 1$ και προσθέτοντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= 2(1 + 2 + \dots + n) - n \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

2. Το άθροισμα 161 φυσικών αριθμών είναι 2007.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή των μέγιστων κοινών διαιρετών τους.

ΛΥΣΗ

Έστω $\alpha_i, i=1, 2, 3, \dots, 161$ οι αριθμοί και d ο ΜΚΔ τους.

Τότε $d \mid 2007$ και $d \mid \alpha_i, \forall i=1, 2, 3, \dots, 161$.

Άρα $d \leq \alpha_i, \forall i=1, 2, 3, \dots, 161$. Έχουμε

$$2007 = \sum_{i=1}^{161} \alpha_i \geq 161d \Rightarrow d \leq \frac{2007}{161} < 13.$$

Οι μόνοι διαιρέτες του 2007 που είναι μικρότεροι του 13 είναι 1, 3, 9 και άρα $d = 9$.

Πράγματι, το 2007 γράφεται $2007 = \underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_{160 \text{ φορές}} + 567$.

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο 0 με $f(0) = 2$ και ισχύει $f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{4}\right) = x^2, \forall x \in R : (*)$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f .

Θέτω $g(x) = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in R$.

Η g είναι συνεχής στο 0 και $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.

$$(*) \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) - \left[f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) \right] = x^2 \Leftrightarrow g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) = x^2, \forall x \in R$$

Άρα διαδοχικά έχουμε:

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x^2}{4}$$

$$g\left(\frac{x}{4}\right) - g\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{x^2}{16}$$

⋮

$$g\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{x^2}{2^{2(n-1)}}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = x^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right)$$

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{4}{3} x^2 \left(1 - \frac{1}{2^{2n}} \right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο 0 με $g(0) = 0$, παίρνοντας όρια καθώς $n \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$g(x) = \frac{4x^2}{3}, \forall x \in R \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4x^2}{3}, \forall x \in R, \text{ οπότε:}$$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4}{3}x^2$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{4}$$

$$f\left(\frac{x}{4}\right) - f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{16}$$

⋮

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2^{2(n-1)}} \quad \text{και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε}$$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{4}{3}x^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2(n-1)}}\right)$$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{4}{3}x^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{16}{9}x^2 \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

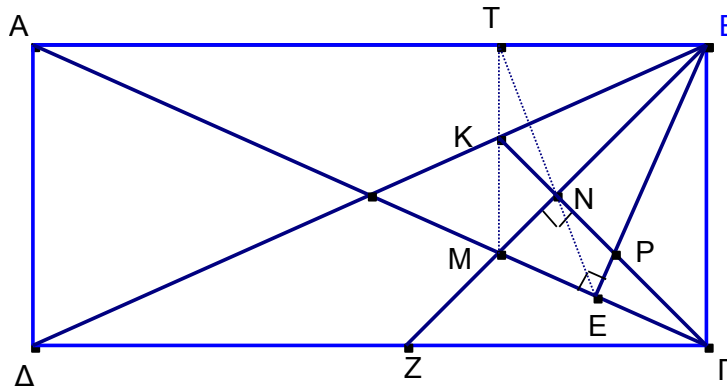
Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 με $f(0) = 2$, παίρνοντας όρια καθώς $n \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$f(x) = 2 + \frac{16x^2}{9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε τις διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ και την ΒΕ κάθετη στην ΑΓ

(Ε σημείο της ΑΓ). Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Μ και την ΔΓ στο Ζ και η κάθετος από το Γ στην ΒΖ τέμνει τη ΒΖ στο Ν και την ΒΔ στο Κ, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΕΝ και ΜΚ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

ΛΥΣΗ

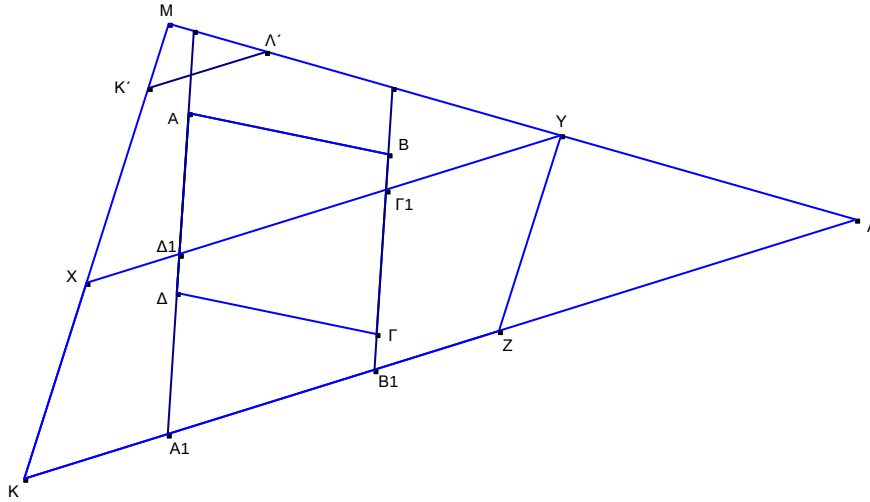


Ας είναι $\angle \Delta B Z = \angle Z B E = \theta$, $\angle N E B = \varphi$ και $\angle \Gamma B E = \omega$. Τότε
 Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BNEΓ είναι $\angle N \Gamma B = \varphi$ και $\angle N \Gamma E = \theta$.
 Στο ορθογώνιο τρίγωνο BΝΓ έχουμε $\omega + \theta + \varphi = 90^\circ : (1)$ και στο ισοσκελές τρίγωνο
 ΒΟΓ έχουμε $2\theta + \omega = \theta + \varphi \Leftrightarrow \theta + \omega = \varphi : (2)$. Από (1), (2) προκύπτει $\varphi = 45^\circ$.
 Έστω ότι η ΜΚ τέμνει την ΑΒ στο Τ. Επειδή $\angle K B M = \angle M B E = \angle N \Gamma M = \theta$, το
 ΒΚΜΓ είναι εγγράψιμο, άρα
 $\angle K M B = \angle K \Gamma B = \angle M B \Gamma = 45^\circ \Rightarrow M K \parallel \Gamma B \Rightarrow M K \perp A B$.
 Φέρουμε την ΤΝ και τότε από το εγγράψιμο ΤΚΝΒ έχουμε
 $\angle K N T = \angle T B K = 45^\circ - \theta : (3)$.
 Αν Ρ το σημείο τομής των ΒΕ, ΓΝ τότε το Ρ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΜΓ
 άρα $M P \parallel \Delta \Gamma$ και $\angle P M \Gamma = \angle M \Gamma Z = 90^\circ - (\varphi + \theta) = 45^\circ - \theta$ και από το εγγράψιμο
 ΜΝΡΕ είναι $\angle P N E = \angle P M E = 45^\circ - \theta : (4)$.
 Από (3), (4) $\Rightarrow \angle K N T = \angle P N E$, από όπου Τ, Ν, Ε είναι συνευθειακά, δηλαδή οι
 ευθείες ΜΚ, ΝΕ τέμνονται στο σημείο Τ της ΑΒ.

5. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καλύπτεται από τρίγωνο ΚΛΜ.

Να αποδείξετε ότι $E\mu\beta(AB\Gamma\Delta) \leq \frac{1}{2} E\mu\beta(K\Lambda M)$.

ΛΥΣΗ



Οι προεκτάσεις των $A\Delta$, $B\Gamma$ τέμνουν την πλευρά $K\Lambda$ στα σημεία A_1 , B_1 αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ώστε να έχει το ίδιο εμβαδόν με το $AB\Gamma\Delta$ και τα Δ_1, Γ_1 να βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα A_1A και B_1B αντίστοιχα. Η ευθεία $\Delta_1\Gamma_1$ τέμνει τις πλευρές KM , ΛM στα σημεία X , Y αντίστοιχα και έστω $YZ \parallel KM$ και έτσι το $XYZK$ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε $(AB\Gamma\Delta) = (A_1B_1\Gamma_1\Delta_1) \leq (XYZK)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(XYZK) \leq \frac{1}{2}(K\Lambda M)$.

- Αν $\Lambda Y < \frac{1}{2} \Lambda M$, τότε το συμμετρικό Λ' του Λ ως προς το Y βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΛM και φέρουμε την $\Lambda'K' \parallel \Lambda K$. Στο τραπέζιο $\Lambda'K'K\Lambda$ το XY είναι διάμεσος και άρα $(XYZK) = \frac{1}{2}(K\Lambda\Lambda'K') \leq \frac{1}{2}(K\Lambda M)$.
- Αν $\Lambda Y > \frac{1}{2} \Lambda M$, τότε το συμμετρικό Λ' του Λ ως προς το Y βρίσκεται στην προέκταση της πλευράς ΛM και παίρνοντας το συμμετρικό M' του M ως προς το Y , αυτό βρίσκεται πάνω στην πλευρά $M\Lambda$. Φέρνουμε την $M'K' \parallel MK$ και εργαζόμαστε ομοίως με το τραπέζιο $KMM'K'$.
- Αν τέλος το Y είναι το μέσον πλευράς ΛM , τότε ισχύει η ισότητα.