



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 19/12/09

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: i) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
ii) $e^x \geq ex$, $\forall x \in \mathbb{R}$
iii) $\gamma \ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \alpha \ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \leq 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Προτεινόμενη λύση:

i) $f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και

$$f''(x) = e^x > 0, \text{ δηλαδή στη θέση } x = 0 \text{ η } f \text{ έχει ελάχιστο.}$$

$$\text{Άρα } f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, και θέτοντας όπου x το $x - 1$
παίρνουμε $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^x \geq ex, \forall x \in \mathbb{R} : (1)$

iii) Από την (1) και για κάθε $x > 0$, $\ln(ex) \leq x \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$
απ' όπου $\ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \leq \frac{\beta}{\gamma} - 1 \Rightarrow \gamma \ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \leq \beta - \gamma$

$$\text{Ανάλογα} \quad \alpha \ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \leq \gamma - \alpha$$

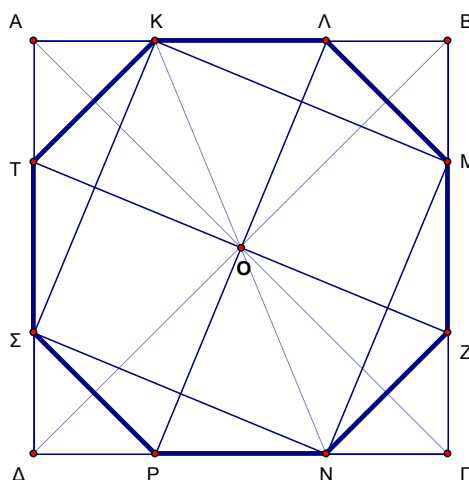
$$\text{και} \quad \beta \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \leq \alpha - \beta$$

Προσθέτουμε τις τρεις τελευταίες ανισότητες και παίρνουμε

$$\gamma \ln\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \alpha \ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \leq 0, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

2. Στις πλευρές $AB, BG, ΓΔ, ΔΑ$ τετραγώνου $ABΓΔ$ παίρνουμε τα σημεία $K, M, N, Σ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AK = BM = ΓN = ΔΣ$.
- α) Να αποδείξετε ότι το $KMNΣ$ είναι τετράγωνο με κέντρο το κέντρο O του τετραγώνου $ABΓΔ$.
- β) Αν οι κάθετες από το κέντρο O προς τις πλευρές του τετραγώνου $KMNΣ$ τέμνουν τις πλευρές του $ABΓΔ$ στα σημεία $Λ, Ρ$ συμμετρικά των $M, Σ$ ως προς την $BΔ$ και $T, Ζ$ συμμετρικά των K, N ως προς την $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $K, M, N, Σ, Λ, Ζ, Ρ, T$ είναι κορυφές κανονικού οκταγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του, συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου $ABΓΔ$.

Προτεινόμενη λύση:



- α) Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα $KBM, MΓN, NΔΣ, ΣAK$ έχουμε ότι $KM = MN = NΣ = ΣK$.
 $\angle ΣKA + \angle BKM = \angle KMB + \angle BKM = 90^\circ \Rightarrow \angle ΣKM = 90^\circ$.
 Το $AKΓN$ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το O .
 Από όλα τα παραπάνω έπεται ότι το $KMNΣ$ είναι τετράγωνο με κέντρο το κέντρο O του τετραγώνου $ABΓΔ$.
- β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα $ΤAK, ΛBM, ΖΓN, ΡΔΣ$ είναι ίσα και έστω $AK = AT = BΛ = BM = ΓΖ = ΓN = ΔΡ = ΔΣ = x$. Τότε $TK = ΛM = ΖN = ΡΣ = x\sqrt{2}$. Εξάλλου τα τρίγωνα $KΛM, MΖN, NΡΣ, ΣTK$ είναι ίσα ισοσκελή με $KΛ = ΛM = MΖ = ΖN = NΡ = ΡΣ = ΣT = TK = x\sqrt{2} : (1)$ και οι παρά τις βάσεις γωνίες τους είναι $22,5^\circ$, που σημαίνει ότι οι γωνίες του οκταγώνου $KΛMΖNΡΣT$ είναι 135° . Το τελευταίο και η (1) δίνουν ότι το $KΛMΖNΡΣT$ είναι κανονικό οκτάγωνο, πλευράς $x\sqrt{2}$.
 Είναι $x\sqrt{2} = \alpha - 2x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}$
 Τέλος, $E_{οκτ} = \alpha^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = \alpha^2 - 2x^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \frac{\alpha^2}{(2+\sqrt{2})^2} = 2(\sqrt{2} - 1)\alpha^2$.

3. Χωρίζουμε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 2010 σε 2010×2010 τετραγωνικά κελιά με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του.
 Σε κάθε τετραγωνικό κελί γράφουμε τυχαία ένα από τους αριθμούς $+1, -1$.
 Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i -γραμμής και με B_i το γινόμενο των αριθμών της i -στήλης του πίνακα ($i = 1, 2, 3, \dots, 2010$). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010}$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Προτεινόμενη λύση:

Προφανώς αν πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς των κελιών κάθε γραμμής A_i και κάθε στήλης B_i είναι $+1$ ή -1 .

Υποθέτουμε ότι από τις $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ γραμμές οι α έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \alpha$ γραμμές θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 .

Όμοια υποθέτουμε ότι από τις $B_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ στήλες οι β έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \beta$ στήλες θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 .

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα $A_1 A_2 \dots A_{2010}$ και $B_1 B_2 \dots B_{2010}$ είναι ίσα. Άρα $(-1)^{2010-\alpha} = (-1)^{2010-\beta}$. Για να ισχύει η τελευταία ισότητα πρέπει οι αριθμοί α και β να είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί ταυτόχρονα.

Επομένως έχουμε:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010} = \alpha + (2010 - \alpha)(-1) + \beta + (2010 - \beta)(-1) = 2(\alpha + \beta) - 4020.$$

Αφού $\alpha + \beta$ είναι άρτιος έπεται ότι το 4 διαιρεί το δεύτερο μέρος της τελευταίας σχέσης.

4. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο, που το τελευταίο τετραψήφιο τμήμα του είναι 2010 και διαιρείται με το 2011.

Προτεινόμενη λύση:

Από τα δεδομένα του προβλήματος μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση:

$$10000x + 2010 = 2011z, \quad \text{όπου } x, z \in \mathbb{N}$$

Θέτοντας $z = y + 1$ ή εξίσωση γίνεται:

$$10000x - 2011y = 1$$

Η τελευταία είναι μια γραμμική διοφαντική εξίσωση και για βρούμε μια λύση της ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τον Ευκλείδιο Αλγόριθμο και θα έχουμε:

$$10000 = 4 \cdot 2011 + 1956$$

$$2011 = 1 \cdot 1956 + 55$$

$$1956 = 35 \cdot 55 + 31$$

$$55 = 1 \cdot 31 + 24$$

$$31 = 1 \cdot 24 + 7$$

$$24 = 3 \cdot 7 + 3$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές αντίστροφα καταλήγουμε ότι

$$1 = 585 \cdot 10000 + (-2909) \cdot 2011$$

επομένως μια λύση της εξίσωσης είναι $(x_0, y_0) = (585, -2909)$, και αφού ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $(10000, 2011) = 1$ οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης είναι: $x = 585 + (-2011)t, t \in \mathbb{Z}$ και $y = -2909 + 10000t, t \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδή η μικρότερη τιμή είναι $x = 585$, ο μικρότερος θετικός ακέραιος είναι 5852010.