



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/10

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f \text{ με } f(x) = \frac{s-a_1}{a_1}(x^2 - 2x + 2) + \frac{s-a_2}{a_2} + \dots + \frac{s-a_n}{a_n} \text{ είναι } n(n-1).$$

Προτεινόμενη λύση 1^η:

$\forall x \in R, f'(x) = \frac{2(s-a_1)(x-1)}{a_1}$ και $f''(x) = \frac{2(s-a_1)}{a_1} > 0$, άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση 1 και η ελάχιστη τιμή της είναι

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{s-a_1}{a_1} + \frac{s-a_2}{a_2} + \dots + \frac{s-a_n}{a_n} \\ &= \frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \dots + \frac{s}{a_n} - n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) - n \end{aligned}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-αρμονικού μέσου έχουμε

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2$$

και η τελευταία σχέση γίνεται

$$f(1) \geq n^2 - n$$

Άρα $f(1) \geq n(n-1)$, που σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ελάχιστο της συνάρτησης είναι $n(n-1)$.

Προτεινόμενη λύση 2^η:

$\forall x \in R, f'(x) = \frac{2(s-a_1)(x-1)}{a_1}$ και $f''(x) = \frac{2(s-a_1)}{a_1} > 0$, άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση 1 και η ελάχιστη τιμή της είναι

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{s-a_1}{a_1} + \frac{s-a_2}{a_2} + \dots + \frac{s-a_n}{a_n} \\ &= \frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \dots + \frac{s}{a_n} - n \\ &= 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \end{aligned}$$

Άρα $f(1) \geq n(n-1)$, που σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ελάχιστο της συνάρτησης είναι $n(n-1)$.

2. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές με τον ελάχιστο βαθμό, που έχει ρίζα τον αριθμό $\rho = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

Προτεινόμενη λύση:

$$\text{Έστω } \rho = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow (\rho - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \rho^2 - 2\rho\sqrt{2} + 2 = 3 \Rightarrow$$

$$(\rho^2 - 1)^2 = (2\rho\sqrt{2})^2 \Rightarrow \rho^4 - 2\rho^2 + 1 = 8\rho^2 \Rightarrow \rho^4 - 10\rho^2 + 1 = 0.$$

Άρα το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο (4^{ου} βαθμού) που έχει ως ρίζα το $\rho = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Αν γράψουμε το

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 2x\sqrt{2} - 1)(x^2 + 2x\sqrt{2} - 1) \\ &= (x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} - \sqrt{3}))(x - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (-\sqrt{2} - \sqrt{3})) \end{aligned}$$

Οι ρίζες είναι:

$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

3. Αν a, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι διαφορετικοί του μηδενός πρώτοι μεταξύ τους και ισχύει

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$$

να αποδείξετε ότι $(a + \beta)$ είναι τετράγωνος αριθμός.

Προτεινόμενη λύση:

Επειδή a, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι, ισχύει $a > \gamma$ και $\beta > \gamma$.

Άρα υπάρχουν θετικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε $a = \gamma + \kappa$ και $\beta = \gamma + \lambda$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\gamma + \kappa} + \frac{1}{\gamma + \lambda} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma(\gamma + \lambda) + \gamma(\gamma + \kappa) = (\gamma + \kappa)(\gamma + \lambda)$$

$$\Rightarrow \gamma^2 + \gamma\kappa + \gamma^2 + \gamma\lambda = \gamma^2 + \gamma\lambda + \gamma\kappa + \kappa\lambda \Rightarrow \gamma^2 = \kappa\lambda$$

Οι αριθμοί κ και λ δεν μπορούν να είναι κοινοί παράγοντες.

Εάν υπάρχει $\delta > 1$ που διαιρεί τον γ θα διαιρεί επίσης και τους a και β , το οποίο δεν είναι δυνατόν εφόσον δίνεται ότι a, β και γ δεν έχουν κοινό παράγοντα. Άρα οι αριθμοί κ και λ είναι τετράγωνοι αριθμοί, δηλαδή $\kappa = \mu^2$ και $\lambda = \nu^2$.

$$\text{Άρα } a + \beta = \gamma + \kappa + \gamma + \lambda = \kappa + \lambda + 2\gamma = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu = (\mu + \nu)^2.$$

4. Οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα άκρα A, B αντίστοιχα χορδής AB κύκλου (O, R) τέμνονται στο σημείο P . ($AB < 2R$). Σε σημείο N της χορδής AB φέρουμε ευθεία κάθετη στο ON , που τέμνει τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία Z, Θ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ZP\Theta$ περνά από το O

(β) Αν η ευθεία που περνά από το μέσον K του OZ και το μέσον E του $P\Theta$, τέμνει την ZP στο T και την $O\Theta$ στο Σ , τότε ισχύει $\frac{\Sigma\Theta}{TP} = \frac{ON}{NB}$.

Προτεινόμενη λύση:

(α) Επειδή $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$
το τετράπλευρο $OAPB$ είναι εγγράψιμο και άρα
θα έχουμε:

$$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ \text{ ή}$$

$$\angle APB + (\angle AOZ + \angle ZOB) = 180^\circ \quad (1).$$

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα

$ONZA$ και $ONB\Theta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \angle \theta OB &= \angle \theta NB = \\ &= \angle ANZ = \angle AOZ \quad (2). \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\angle APB + (\angle \theta OB + \angle ZOB) = 180^\circ \text{ ή}$$

$\angle APB + \angle ZO\theta = 180^\circ$, δηλαδή το
τετράπλευρο $ZO\theta P$ είναι εγγράψιμο.

(β) Φέρουμε $\theta\pi // PY // OZ$. Από τα όμοια
τρίγωνα $\triangle TZK \approx \triangle TPY$ παίρνουμε

$$\frac{TZ}{TP} = \frac{ZK}{PY}$$

και από τα όμοια τρίγωνα $\triangle \Sigma OK \approx \triangle \Sigma \theta \pi$ παίρνουμε

$$\frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} = \frac{OK}{\theta \pi}$$

Όμως από τα ίσα τρίγωνα $\triangle E\theta \pi = \triangle EPY$, παίρνουμε $PY = \theta \pi$. Άρα από τις προηγούμενες
ισότητες θα έχουμε:

$$\frac{TZ}{TP} = \frac{ZK}{PY} = \frac{OK}{\theta \pi} = \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} \Rightarrow \frac{TZ}{TP} = \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} \quad (3)$$

Όμως έχουμε:

$$\Sigma O = \Sigma \theta - O\theta \Rightarrow \frac{\Sigma O}{\Sigma \theta} = 1 - \frac{O\theta}{\Sigma \theta} \text{ και } TZ = TP - ZP \Rightarrow \frac{TZ}{TP} = 1 - \frac{ZP}{TP}$$

Επομένως η (3) γράφεται:

$$\frac{O\theta}{\Sigma \theta} = \frac{ZP}{TP}$$

Επειδή όμως το τρίγωνο $\triangle OZ\theta$ είναι ισοσκελές και $O\theta = OZ$, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\frac{OZ}{\Sigma \theta} = \frac{ZP}{TP} \Rightarrow \frac{OZ}{ZP} = \frac{\Sigma \theta}{TP}$$

Από τα όμοια τρίγωνα

$$\triangle OZP \approx \triangle ONB \Rightarrow \frac{OZ}{ZP} = \frac{ON}{NB}$$

Άρα τελικά θα πάρουμε

$$\frac{\Sigma \theta}{TP} = \frac{ON}{NB}.$$

