



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/11/2010

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

Προτεινόμενες λύσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} \cdot \eta\mu x$.
- (α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- (β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $\sqrt{2} \cdot \eta\mu x \leq e^{x - \frac{\pi}{4}}$.

Λύση

(α) $f'(x) = e^{-x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$		+	-
f	$\min$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\max$	$\min$

Άρα $f \uparrow$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$ και $f \downarrow$ στο διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \pi)$.

Το σημείο $M(\frac{\pi}{4}, e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$ είναι (ολικό) μέγιστο της f . Τα σημεία $O(0, 0)$ και $N(\pi, 0)$ είναι ελάχιστα της f .

(β) Αφού η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{4}$, έχουμε $\forall x \in [0, \pi], f(x) \leq f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$

$$e^{-x} \cdot \eta\mu x \leq e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \eta\mu x \leq e^{x - \frac{\pi}{4}}$$

2. Αν H είναι το ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών) και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι

(α) $AH = 2R \sigma\upsilon\nu A$ και (β) $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 12R^2 - (B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + AB^2)$.

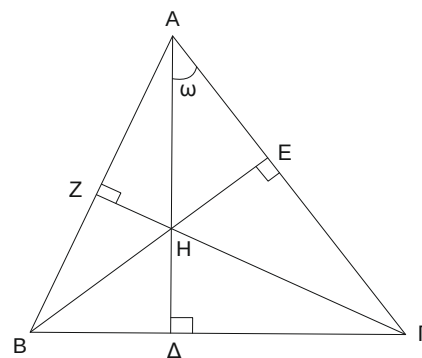
Λύση

(α) Τρίγωνο AEH : $AH = \frac{AE}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{AE}{\eta\mu\Gamma}$,

Τρίγωνο AEB : $AE = AB \sigma\upsilon\nu A$.

Άρα $AH = \frac{AB \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma} = \frac{2R \eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma} = 2R \sigma\upsilon\nu A$.

(β) $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 = 4R^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma)$
 $= 4R^2(3 - \eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B - \eta\mu^2 \Gamma)$
 $= 12R^2 - (4R^2 \eta\mu^2 A + 4R^2 \eta\mu^2 B + 4R^2 \eta\mu^2 \Gamma) = 12R^2 -$
 $(B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + AB^2)$.



3. Αν οι ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 της εξίσωσης $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\alpha(9\beta - 2\alpha^2) = 27\gamma$.

Λύση

Αφού ρ_1, ρ_2, ρ_3 ρίζες της εξίσωσης, έχουμε

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma \equiv (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3) \Leftrightarrow$$

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma \equiv x^3 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)x^2 + (\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1)x - \rho_1\rho_2\rho_3$$

απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \alpha : (1) \\ \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = \beta : (2) \\ \rho_1\rho_2\rho_3 = \gamma : (3) \end{cases}$$

Επίσης, επειδή ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι διαδοχικοί όροι α.π., έχουμε $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_2 : (4)$

Από (1), (4) παίρνουμε $\rho_2 = \frac{\alpha}{3}$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$$(\rho_1 + \rho_3) \left(\frac{\alpha}{3} \right) + \rho_3 \rho_1 = \beta \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\alpha}{3} \right) \left(\frac{\alpha}{3} \right) + \rho_3 \rho_1 = \beta$$

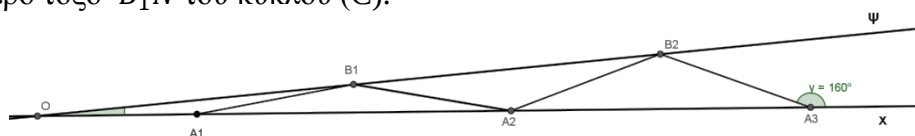
$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{\alpha}{3} \right)^2 + \rho_3 \rho_1 = \beta \Leftrightarrow \rho_3 \rho_1 = \frac{9\beta - 2\alpha^2}{9}.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην (3), έχουμε $\frac{\alpha}{3} \cdot \frac{9\beta - 2\alpha^2}{9} = \gamma \Leftrightarrow \alpha(9\beta - 2\alpha^2) = 27\gamma.$

4. Δίνεται η γωνία $\angle \chi O \psi$. Πάνω στις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2 έτσι ώστε να ισχύει $OA_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = \alpha$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών A_1B_1 και B_2A_3 , η γωνία $\angle B_2A_3\chi = 160^\circ$ και N το συμμετρικό του σημείου A_2 ως προς την $O\psi$,

(α) να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο B_1NMB_2 είναι εγγράψιμο.

(β) αν (C) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου B_1NMB_2 να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα NB_2, B_1B_2 και το μικρότερο τόξο $\widehat{B_1N}$ του κύκλου (C).



Λύση

(α) Έστω $\angle B_1OA_1 = \varphi$ τότε $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_2A_1 = 2\varphi$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle A_1B_1A_2$).

Άρα $\angle A_2B_1B_2 = \angle B_1B_2A_2 = 3\varphi$.

Στο τρίγωνο έχουμε $\angle B_2A_3A_2 = 20^\circ$ και $\angle A_2B_2A_3 = 140^\circ$.

Από το τρίγωνο OB_2A_3 έχουμε

$$\varphi + 3\varphi + 160^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\varphi = 5^\circ.$$

Τελικά από το τρίγωνο $\triangle A_1MA_3$ θα πάρουμε: $\angle A_1MA_3 = 180^\circ - 20^\circ - 2\varphi \Rightarrow \angle A_1MA_3 = 150^\circ$ (1)

Επίσης το τετράπλευρο $B_1NB_2A_2$ είναι ρόμβος, γιατί οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, άρα $\angle B_1NB_2 = \angle B_1A_2B_2 = 150^\circ$ (2). Επομένως από τις (1) και (2) έχουμε $\angle A_1MA_3 = \angle B_1NB_2$. Δηλαδή το τετράπλευρο B_1NMB_2 είναι εγγράψιμο.

(β) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο B_1NB_2 έχουμε

$$(B_1B_2)^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \sin 150^\circ \Rightarrow (B_1B_2)^2 = \alpha^2(2 + \sqrt{3}).$$

Αν K το κέντρο του κύκλου (C), το τρίγωνο B_1KB_2 είναι ισόπλευρο, άρα η ακτίνα του είναι

$$R = B_1B_2 = \alpha \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Άρα το εμβαδόν E του μεικτόγραμμου τριγώνου είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_{\triangle B_1NB_2} + E_{\text{κυκλ.τμ.}\widehat{B_1N}} = \frac{1}{2} \alpha^2 \eta\mu 150^\circ + \frac{\pi R^2 30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \eta\mu 30^\circ = \\ &= \frac{\alpha^2}{4} + R^2 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2(2 + \sqrt{3})(\pi - 3)}{12} \Rightarrow E = \frac{\alpha^2(2\pi + \pi\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3)}{12}. \end{aligned}$$