



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/11

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1:

Να βρείτε όλα τα ζευγάρια (p, q) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{2(p^5 + q)}{p} = 1 + 3\left(\frac{q}{p}\right)^2$$

αν p, q θετικοί πρώτοι αριθμοί.

Λύση

Κάνοντας τις πράξεις στην δεδομένη εξίσωση θα πάρουμε

$$\frac{2(p^5 + q)}{p} = 1 + 3\left(\frac{q}{p}\right)^2 \Leftrightarrow 2p^6 + 2pq - p^2 = 3q^2$$

η οποία γίνεται

$$p(2p^5 + 2q - p) = 3q^2$$

Άρα $p \mid 3q^2$ και αφού $(p, q) = 1$ θα έχουμε ή $p = 3$ ή $p = q$.

- Αν $p = 3$, τότε αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εξίσωση θα πάρουμε $q^2 - 2q - 483 = 0$, από την οποία έχουμε $q = 23$.
- Αν $p = q$, έχουμε $2p^6 - 2p^2 = 0 \Leftrightarrow 2p^2(p^4 - 1) = 0 \Rightarrow p = 1$, που είναι άτοπο.

Επομένως το μοναδικό ζευγάρι πρώτων που ικανοποιεί την εξίσωση είναι $(p, q) = (3, 23)$

Πρόβλημα 2:

Δίνεται συνάρτηση $f: [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) - 4f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$
- $f(e) = 1$
- $f'(e) = 2$

Να αποδείξετε ότι:

- Η συνάρτηση $g(x) = (f'(x) - 2f(x))e^{2x}$ είναι φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.
- ισχύει η ανισότητα

$$f(x)e^{-2x} \leq \frac{1}{e^{2e}} \text{ για κάθε } x \in [e, +\infty).$$

Λύση

α) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση g στο $[e, +\infty)$ έχουμε

$g'(x) = (f''(x) - 2f'(x))e^{2x} + 2(f'(x) - 2f(x))e^{2x} = (f''(x) - 4f(x))e^{2x}$
 Άρα από την υπόθεση $f''(x) - 4f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$, έχουμε

$$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [e, +\infty)$$

δηλαδή η g είναι φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Από την μονοτονία της g στο $[e, +\infty)$ παίρνουμε
 $e \leq x$ τότε $g(e) \geq g(x)$ ή $(f'(e) - 2f(e))e^{2e} \geq (f'(x) - 2f(x))e^{2x}$
 ή $(f'(x) - 2f(x))e^{2x} \leq 0$ (1).

β) θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x)e^{-2x}$, $x \in [e, +\infty)$ και παραγωγίζοντας θα έχουμε

$$h'(x) = f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x} = (f'(x) - 2f(x))e^{-2x}$$

και από την (1) θα πάρουμε $h'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [e, +\infty)$, επομένως η h είναι φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, και θα έχουμε

$$\forall x \geq e \text{ είναι } h(x) \leq h(e) \text{ ή } f(x)e^{-2x} \leq f(e)e^{-2e}$$

και τελικά

$$f(x)e^{-2x} \leq \frac{1}{e^{2e}} \quad \text{για κάθε } x \in [e, +\infty).$$

Πρόβλημα 3:

Σε τεταρτοκύκλιο AKB (K το κέντρο) ακτίνας R , παίρνουμε σημείο M και φέρουμε $M\Gamma$ και $M\Delta$ κάθετες πάνω στις ακτίνες KA, KB αντίστοιχα. Αν $M\Gamma + M\Delta = \lambda R$, $\lambda > 0$, να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο θετικός αριθμός λ .

Λύση 1.

Έστω $M\Gamma = x$ και $M\Delta = y$.

Τότε $x + y = \lambda R$ και

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = R^2$$

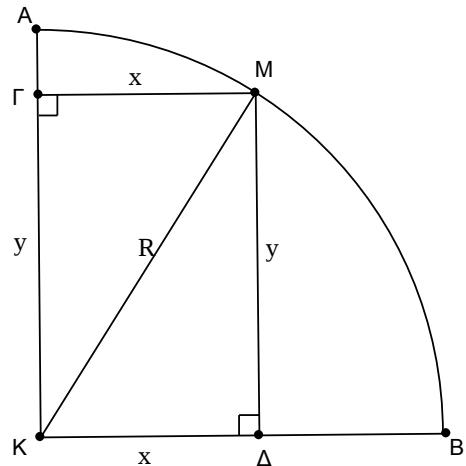
$$\Leftrightarrow \lambda^2 R^2 - 2xy = R^2$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{(\lambda^2 - 1)R^2}{2}.$$

Άρα οι θετικοί x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - \lambda R\omega + \frac{(\lambda^2 - 1)R^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\omega^2 - 2\lambda R\omega + (\lambda^2 - 1)R^2 = 0$$



$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 R^2 - 8(\lambda^2 - 1)R^2 \geq 0 \\ (\lambda^2 - 1)R^2 > 0 \\ \lambda R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 \leq 2 \\ \lambda^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq \sqrt{2} \\ \lambda > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \lambda \leq \sqrt{2}$$

Λύση 2

Προφανώς $\lambda > 1$, γιατί αν $0 < \lambda < 1$, τότε $x + y = \lambda R < R$, άτοπο.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και την δεδομένη σχέση εκφράζουμε το λ , συναρτήσει του x , ως εξής:

$$\lambda = \frac{x+y}{R} \Leftrightarrow \lambda(x) = \frac{x + \sqrt{R^2 - x^2}}{R}, \quad 0 < x < R$$

Παραγωγίζοντας, την συνάρτηση έχουμε

$$\lambda'(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2} - x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)$$

$$\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\lambda''\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) < 0$, άρα η συνάρτηση λ , έχει μέγιστη τιμή για $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ την $\lambda\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$. Επομένως θα έχουμε $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$.

Πρόβλημα 4:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και M το μέσο του AB . Έστω σημείο Δ πάνω στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και E εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοια ώστε $MB = M\Delta = ME$. Αν Z το σημείο τομής των ευθειών $E\Delta$ και $A\Gamma$ και H, Θ τα σημεία τομής της ευθείας MZ με τις ευθείες BE και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $HB\Theta A$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Φέρουμε $MI \perp E\Delta$, άρα το τετράπλευρο $ZIMA$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο και άρα έχουμε $\angle AIZ = \angle ZMA = \angle \Theta MB$ (1).

Επειδή τα A, E, Δ, B είναι ομοκυκλικά από την υπόθεση, από το εγγράψιμο τετράπλευρο $E\Delta BA$ παίρνουμε $\angle \Theta BM = \angle AEI$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $\triangle AEI \approx \triangle \Theta BM$

και επομένως αφού I και M είναι μέσα των $E\Delta$ και AB θα πάρουμε

$$\frac{IE}{BM} = \frac{AE}{B\Theta} = \frac{IA}{\Theta M} \Rightarrow \frac{2(IE)}{2(BM)} = \frac{AE}{B\Theta} \Rightarrow \frac{E\Delta}{AB} = \frac{AE}{B\Theta}.$$

Άρα $\triangle AB\Theta \approx \triangle \Delta EA$. Επομένως $\angle A\Delta E = \angle BA\Theta$ και αφού $\angle A\Delta E = \angle EBA$. Από τις τελευταίες ισότητες παίρνουμε ότι οι ευθείες BE και $A\Theta$ είναι παράλληλες. Τελικά από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MH}{M\Theta} = 1 \Rightarrow MH = M\Theta$$

Δηλαδή $HB\Theta A$ είναι παραλληλόγραμμο.

