



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ το M είναι το μέσον της $B\Gamma$, AD είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών B, Γ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle B A \Gamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

$$ME = MZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

ΛΥΣΗ

Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε:

Το τρίγωνο $\triangle ABK$ είναι ισοσκελές (K το σημείο τομής της προέκτασης της BE με την $A\Gamma$). Άρα επειδή E μέσο της BK και M μέσο της $B\Gamma$ θα έχουμε

$$EM \parallel \frac{K\Gamma}{2}.$$

Επομένως, αφού $EM \parallel A\Gamma$ έπεται $\angle ZEM =$

$$\angle \frac{BA\Gamma}{2} \quad (1)$$

Το τετράπλευρο $ABDE$ είναι εγγράψιμο άρα

$$\angle EDM = \angle \frac{BA\Gamma}{2} \quad (2). \text{ Επίσης από το εγγράψιμο}$$

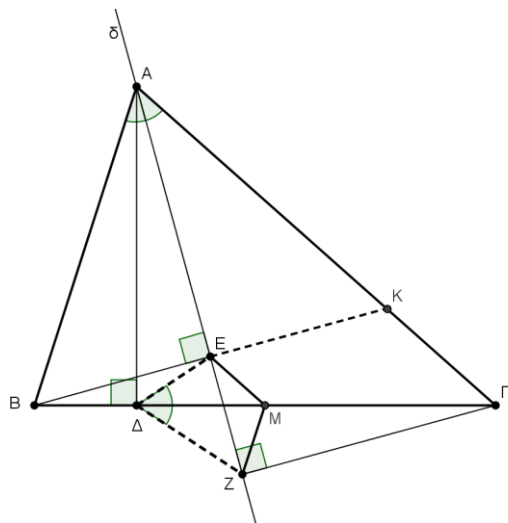
$$\text{τετράπλευρο } A\Gamma ZD \text{ παίρνουμε } \angle MDZ = \angle \frac{BA\Gamma}{2} \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) το τετράπλευρο $DEMZ$

εγγράψιμο, επομένως

$\angle MZE = \angle EDM = \angle \frac{BA\Gamma}{2}$ από την (2), και λόγω της (1) το τρίγωνο $\triangle MEZ$ είναι ισοσκελές δηλαδή $ME = MZ$. Τελικά

$$MZ = EM = \frac{K\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AK}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 9 \\ (x-y)(x^2+y^2) = 5 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$(x+y)^2(x-y) + (x-y)(x^2+y^2) = 14 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 7 \quad (1).$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$(x+y)^2(x-y) - (x-y)(x^2+y^2) = 4 \Leftrightarrow (x-y)xy = 2 \quad (2).$$

Η (1) γράφεται

$$(x-y)[(x-y)^2 + 2xy + xy] = 7 \Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 7$$

και λόγω της (2) η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)^3 + 3 \cdot 2 = 7 \Leftrightarrow (x-y)^3 = 1 \Leftrightarrow x-y = 1$$

Άρα η λύση του συστήματος $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$

δίνει τις λύσεις $(2,1), (-1,-2)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m και n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m-1$ και ο m να διαιρεί τον $2n-1$.

ΛΥΣΗ

Ζητούμε $m, n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $2m-1 = kn$, $n \in \mathbb{N}$ και $2n-1 = \lambda m$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

Απαλείφοντας το n από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$m(4-k\lambda) = k+2$$

Επίσης, απαλείφοντας το m από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$n(4-k\lambda) = \lambda+2$$

Αφού $k+2 > 0$ και $\lambda+2 > 0 \Rightarrow 4-k\lambda > 0 \Rightarrow k\lambda < 4$. Άρα $k\lambda = 1$ ή $k\lambda = 2$ ή $k\lambda = 3$.

1^η περίπτωση: $k\lambda = 1 \Rightarrow k = \lambda = 1 \Rightarrow m = n = 1$.

2^η περίπτωση: $k\lambda = 2 \Rightarrow k = 1, \lambda = 2$ ή $k = 2, \lambda = 1$.

$$\text{Αν } k = 1, \lambda = 2 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{άτοπο.}$$

$$\text{Αν } k = 2, \lambda = 1 \Rightarrow 2n = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{2}, \text{άτοπο.}$$

3^η περίπτωση: $k\lambda = 3 \Rightarrow k = 1, \lambda = 3$ ή $k = 3, \lambda = 1$.

$$\text{Αν } k = 1, \lambda = 3 \Rightarrow m = 3, n = 5.$$

$$\text{Αν } k = 3, \lambda = 1 \Rightarrow m = 5, n = 3.$$

Άρα λύσεις $(1,1), (3,5), (5,3)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε την ανισότητα

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{36} < \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{72}.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right)$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και παίρνουμε

$$-\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{36}}, \quad \xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right)$$

Επομένως

$$\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{5\pi}{18} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \eta\mu\xi < \eta\mu \frac{5\pi}{18} \Leftrightarrow -\eta\mu \frac{5\pi}{18} < -\eta\mu\xi < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& -\eta\mu\frac{5\pi}{18} < \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{36}} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}}{\frac{\pi}{36}} < \eta\mu\frac{5\pi}{18} < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{72} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} < \frac{\pi}{36}
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{36} < \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{72}.$$