



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 8/12/12

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1:

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει

$$f(3x^2 + 5x + 1) < f(4x^2 - 5x - 6)$$

να βρείτε τις όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση:

Αφού η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + 5x + 1 > 0 \\ 4x^2 - 5x - 6 > 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Οι λύσεις του συστήματος (1) είναι: $x < \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ ή $x > 2$ (2).

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, παίρνουμε:

$$3x^2 + 5x + 1 > 4x^2 - 5x - 6 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 7 > 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας ανίσωσης είναι: $5 - 4\sqrt{2} < x < 5 + 4\sqrt{2}$ (3).

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$, είναι το διάστημα που συναληθεύουν οι (2) και (3) είναι:

$$2 < x < 5 + 4\sqrt{2}$$

Πρόβλημα 2:

Αν η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και η εξίσωση

$$(x^2 - 2\gamma x + \delta)^2 + \alpha(x^2 - 2\gamma x + \delta) + \beta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες να αποδείξετε ότι:

$$\delta^2 + \alpha\delta + \beta > \gamma^4.$$

Προτεινόμενη λύση:

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + ax + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Από τους τύπους του Vietta έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\alpha \\ x_1 x_2 &= \beta \end{aligned}$$

και $\Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0$.

Θέτω $x^2 - 2\gamma x + \delta = \omega$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + \alpha\omega + \beta = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις

$$x^2 - 2\gamma x + \delta = x_1$$

$$x^2 - 2\gamma x + \delta = x_2$$

Και επειδή δεν έχει ρίζες πραγματικές ρίζες η εξίσωση

$$(x^2 - 2\gamma x + \delta)^2 + \alpha(x^2 - 2\gamma x + \delta) + \beta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι οι εξισώσεις

$$x^2 - 2\gamma x + \delta - x_1 = 0$$

$$x^2 - 2\gamma x + \delta - x_2 = 0$$

δεν έχουν λύση στο $\mathbb{R}$, και επομένως ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} 4\gamma^2 - 4(\delta - x_1) < 0 \\ 4\gamma^2 - 4(\delta - x_2) < 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \gamma^2 - (\delta - x_1) < 0 \\ \gamma^2 - (\delta - x_2) < 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \gamma^2 < (\delta - x_1) \\ \gamma^2 < (\delta - x_2) \end{aligned} \right\}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$$\gamma^4 < (\delta - x_1)(\delta - x_2) = \delta^2 - \delta(x_1 + x_2) + x_1x_2 \Leftrightarrow \delta^2 + \alpha\delta + \beta > \gamma^4.$$

Πρόβλημα 3:

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και έστω H το σημείο τομής των υψών του ΓE και $B\Delta$. Αν ο κύκλος με διάμετρο το ΔE τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Θ και Z αντίστοιχα, K το σημείο τομής των ΘZ και AH και P το σημείο τομής της AH με την $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{B\Delta \cdot A\Gamma \cdot AK}{\Gamma E \cdot A\Theta \cdot AP} = 1$$

Προτεινόμενη λύση:

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $E\Delta\Gamma B$ έχουμε ότι $\angle AB\Delta = \angle E\Gamma\Delta$, άρα τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι όμοια και παίρνουμε:

$$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow AB = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{E\Gamma} \quad (1).$$

Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $\Theta Z\Delta E$ και το εγγράψιμο τετράπλευρο $E\Delta\Gamma B$ θα έχουμε:

$$\angle AZ\Theta = \angle A\Gamma\Delta = \angle \Delta\Gamma B$$

Επομένως $\Theta Z \parallel B\Gamma$, και άρα

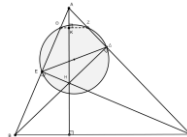
$$\triangle A\Theta Z \approx \triangle AB\Gamma$$

Από την τελευταία ομοιότητα των τριγώνων συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{A\Theta}{AB} = \frac{AK}{AP} \Rightarrow AB = \frac{A\Theta \cdot AP}{AK} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\frac{B\Delta \cdot A\Gamma \cdot AK}{\Gamma E \cdot A\Theta \cdot AP} = 1.$$



Πρόβλημα 4:

Τέσσερις πόλεις είναι κορυφές ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε ένα σύστημα αυτοκινητοδρόμων που συνδέει αυτές τις τέσσερις πόλεις έτσι ώστε το συνολικό μήκος των δρόμων να είναι ελάχιστο.

Προτεινόμενη λύση:

Έστω οι τέσσερις πόλεις να είναι οι A, B, Γ, Δ . Θεωρούμε ένα τυχαίο σύστημα δρόμων που τις συνδέει. Τότε θα υπάρχουν δρόμοι από το A προς το Γ και από το B προς το Δ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτοί οι δρόμοι θα είναι στο εσωτερικό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, αφού αλλιώς κάποιος θα μπορούσε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό μήκος των δρόμων ενώνοντας τις πόλεις A με Γ και B με Δ .



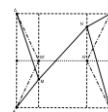
Σχήμα 1.

Θεωρούμε δύο δρόμους στο εσωτερικό του τετραγώνου από το A προς το Γ και από το B προς το Δ και έστω M και N τα σημεία που τέμνονται (σχήμα 1).

Μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε αυτό το σύστημα δρόμων, αντικαθιστώντας αυτό, με το σύστημα που αποτελείται από τα πέντε ευθύγραμμα τμήματα

$$AM, \Delta M, MN, BN, \Gamma N$$

Φέρουμε παράλληλες από το σημείο M και N προς τις $A\Delta$ και $B\Gamma$. Τότε παίρνουμε σημεία πάνω σε αυτές τις παράλληλες M' και N' , αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισαπέχουν από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ (σχήμα 2).



Σχήμα 2.

Άρα παίρνουμε:

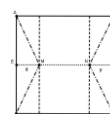
$$AM + \Delta M \geq AM' + \Delta M' \text{ και } BN + \Gamma N \geq BN' + \Gamma N'$$

Επίσης προφανώς έχουμε $MN \geq M'N'$, επειδή αυτή είναι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών που φέραμε.

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες έχουμε

$$\begin{aligned} AM + \Delta M + MN + BN + \Gamma N \\ \geq AM' + \Delta M' + M'N' + BN' + \Gamma N' \end{aligned}$$

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στο εξής:



Σχήμα 3.

Αν E και Z τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, θέλουμε να βρούμε σημεία M και N πάνω στο τμήμα EZ τέτοια ώστε να είναι το μήκος $AM + \Delta M + MN + BN + \Gamma N$ ελάχιστο (σχήμα 3).

Έστω a το μήκος της πλευράς του $AB\Gamma\Delta$ και

$$EM = x, NZ = y, \text{ όπου } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x.$$

Τότε

$$AM = M\Delta = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad MN = a - x - y, \quad BN = \Gamma N = \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Άρα έχουμε να ορίσουμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$F(x, y) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + a - x - y + 2\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{4}} \quad \text{για } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - x$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση παίρνουμε:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4x^2}}} - 1$$

Θα έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, και βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή της f γίνεται για

$x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ και είναι ίση με $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Αφού $F(x, y) = f(x) + f(y) + a$, συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο της συνάρτησης $F(x, y)$ γίνεται για $x = y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ και αυτό είναι ίσο με $a(1 + \sqrt{3})$.

Άρα η λύση του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

