



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Ημερομηνία: 10/11/2012

Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**Γ' Λυκείου**

**Πρόβλημα 1** : Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{125^x + 27^x}{75^x + 45^x} = \frac{19}{15}$$

**Προτεινόμενη Λύση**

Η εξίσωση γράφεται  $\frac{5^{3x} + 3^{3x}}{3^x \cdot 5^{2x} + 5^x \cdot 3^{2x}} = \frac{19}{15} \Leftrightarrow \frac{(5^x + 3^x)(5^{2x} - 5^x \cdot 3^x + 3^{2x})}{5^x \cdot 3^x (5^x + 3^x)} = \frac{19}{15}$

$$\Leftrightarrow \frac{(5^{2x} - 5^x \cdot 3^x + 3^{2x})}{5^x \cdot 3^x} = \frac{19}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5^{2x} - 5^x \cdot 3^x + 3^{2x})}{5^x \cdot 3^x} = \frac{19}{15}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{19}{15} .$$

Θέτουμε  $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \omega$  και η εξίσωση γράφεται  $\omega - 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{19}{15} \Leftrightarrow 15\omega^2 - 34\omega + 15 = 0$ , απ' όπου  $\omega = \frac{5}{3}$  ή  $\omega = \frac{3}{5}$ , δηλαδή  $\boxed{x = 1 \text{ ή } x = -1}$ .

**Πρόβλημα 2** : Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί  $\forall x \in \mathbb{R}$  τις σχέσεις:

$$f(x+3) \geq f(x) + 3, \quad f(x+1) \leq f(x) + 1$$

και  $f(1) = 0$ . Να βρείτε την τιμή του  $f(2012)$ .

**Προτεινόμενη Λύση**

Από τις δεδομένες ανισοτικές σχέσεις παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} f(x) + 3 &\leq f(x+3) = f((x+2)+1) \leq f(x+2) + 1 = f((x+1)+1) + 1 \\ &\leq f(x+1) + 2 \leq f(x) + 3. \end{aligned}$$

Άρα από τα προηγούμενα παίρνουμε

$$f(x+1) + 2 = f(x) + 3 \Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επαγωγικά για  $n \in \mathbb{N}$  παίρνουμε:

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

$$f(x+2) = f(x+1) + 1$$

$\vdots$

$$f(x+n) = f(x+n-1) + 1$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε

$$f(x+n) = f(x) + n$$

Για  $x = 1$  στην τελευταία σχέση παίρνουμε

$$f(n+1) = f(1) + n \Leftrightarrow f(n+1) = n$$

Από την τελευταία σχέση θα έχουμε  $f(2012) = f(2011+1) = 2011$ .

**Πρόβλημα 3 :** Δύο κύκλοι  $(O, R_1)$  και  $(K, R_2)$  με ακτίνες  $R_1 = 2 + \sqrt{3}$  και  $R_2 = 2 - \sqrt{3}$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Φέρουμε την κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων η οποία εφάπτεται των κύκλων  $(O, R_1)$  και  $(K, R_2)$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι: ι)  $B\Gamma = 2$  και ιι)  $\angle AB\Gamma = 15^\circ$

(β) Αν η εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο  $A$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου  $BMA$  (που περικλείεται από το τόξο  $AB$  και τα τμήματα  $BM$  και  $AM$ ).

### Προτεινόμενη Λύση

(α) ι) Φέρουμε  $O_2K \perp O_1B$ , τότε

$$O_1K = R_1 - R_2 = 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle O_2KO_1$  παίρνουμε:

$$O_2K^2 = O_2O_1^2 - O_1K^2 \Leftrightarrow O_2K^2 = 16 - 12 = 4 \\ \Leftrightarrow O_2K = 2.$$

και αφού  $O_2K = B\Gamma = 2$ .

ιι) Φέρουμε  $O_1\Delta \perp AB$  τότε  $\angle AB\Gamma = \angle \Delta O_1B = \beta$

άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle O_1\Delta B$  έχουμε

$$\eta\mu\beta = \frac{B\Delta}{O_1B} \Leftrightarrow B\Delta = (2 + \sqrt{3})\eta\mu\beta \text{ και επειδή } AB = 2B\Delta \Leftrightarrow AB = (2 + \sqrt{3})\eta\mu\beta.$$

Ομοίως παίρνουμε  $A\Gamma = (2 - \sqrt{3})\eta\mu\gamma$ , όπου  $\gamma = \angle B\Gamma O_2$ . Το τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο, αφού αν η εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο  $A$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ , τότε θα έχουμε  $MA = M\Gamma = MB$ .

Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 4 = 4(2 + \sqrt{3})^2 \eta\mu^2\beta + 4(2 - \sqrt{3})^2 \eta\mu^2\gamma \Leftrightarrow$$

$$1 = (2 + \sqrt{3})^2 \eta\mu^2\beta + (2 - \sqrt{3})^2 \eta\mu^2(90^\circ - \beta) \Leftrightarrow$$

$$1 = (2 + \sqrt{3})^2 \eta\mu^2\beta + (2 - \sqrt{3})^2 \sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow$$

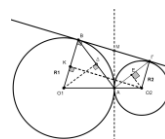
$$1 = (2 + \sqrt{3})^2 \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\beta}{2} + (2 - \sqrt{3})^2 \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\beta}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\beta = 30^\circ \Leftrightarrow \beta = \angle AB\Gamma = 15^\circ.$$

### Δεύτερη λύση για το (ii):

Από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle O_2KO_1$  θα έχουμε:

$$\begin{cases} O_1O_2 = 4 \\ O_2K = B\Gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \angle O_2O_1K = 30^\circ$$



και η γωνία χορδής και εφαπτομένης  $\angle AB\Gamma = \frac{\angle O_2 O_1 K}{2} = 15^\circ$ .

(β) Έχουμε από το σχήμα μας:

$$\begin{aligned} E_{\muεικτ.(BMA)} &= E_{\Delta BMA} - E_{κυκλ.τμ(AB)} \Leftrightarrow E_{\muεικτ.(BMA)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu 150^\circ - \left[ \frac{\pi(2 + \sqrt{3})^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^2 \eta\mu 30^\circ \right] \Leftrightarrow \\ E_{\muεικτ.(BMA)} &= \frac{3 - (2 + \sqrt{3})^2(\pi - 3)}{12}. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 4 :** Για τις σταθερές  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει λύση της εξίσωσης  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  στο διάστημα  $(0,1)$ .

#### Προτεινόμενη Λύση

Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ , που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με  $f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

Από το ΘΜΤ για την  $f$  στο διάστημα  $[0, 1]$  έχουμε ότι υπάρχει  $\rho \in (0,1)$ , ώστε

$$f'(\rho) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_n\rho^n = 0 \text{ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.}$$