



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 7/12/13

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$$

δεν έχει λύση στους ρητούς αριθμούς.

Προτεινόμενη λύση :

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z - 1)^2 = 7 \quad (1)$$

Αν θέσουμε $a = 2x - 1, b = 2y - 1, c = 2z - 1$, τότε οι αριθμοί x, y, z είναι ρητοί αν και μόνον αν οι αριθμοί a, b, c είναι ρητοί. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7 \quad (2)$$

δεν έχει λύση στους ρητούς αριθμούς.

Υποθέτουμε ότι η (2) έχει λύση στους ρητούς, έστω

$$a = \frac{p}{d}, \quad b = \frac{q}{d}, \quad c = \frac{r}{d}$$

όπου $p, q, r, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ και $(p, q, r) = 1$.

Με αντικατάσταση στην (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

$$p^2 + q^2 + r^2 = 7d^2 \quad (3)$$

έχει λύση ακεραίους.

Θεωρούμε τα δύο μέλη της (3) $\text{mod } 8$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου ακεραίου $\text{mod } 8$ είναι 0, 1, 4. Επομένως, τα πιθανά υπόλοιπα $\text{mod } 8$ του πρώτου μέλους της (3) είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ενώ τα πιθανά υπόλοιπα $\text{mod } 8$ του δευτέρου μέλους της (3) είναι 0, 4, 7.

Επειδή η εξίσωση (3) έχει λύση στους ακεραίους, πρέπει τα υπόλοιπα $\text{mod } 8$ των δύο μελών της να είναι 0 ή 4. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνον όταν οι αριθμοί p, q και r είναι άρτιοι, οπότε $(p, q, r) \geq 2$, που είναι άτοπο.

Πρόβλημα 2:

Να δείξετε ότι το άθροισμα $\Sigma = \frac{2}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{4}{3^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{2012}{2011^2 \cdot 2013^2} + \frac{2013}{2012^2 \cdot 2014^2}$ είναι μικρότερο από το $\frac{5}{16}$.

Προτεινόμενη λύση :

Έχουμε :

$$\frac{n+1}{n^2 \cdot (n+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n+2)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]$$

Θέτοντας στη σχέση αυτή $n = 1, 2, 3, \dots, 2012$, με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων που προκύπτουν παίρνουμε :

$$\Sigma = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2014^2} - \frac{1}{2015^2} \right) = \frac{5}{16} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2014^2} + \frac{1}{2015^2} \right) < \frac{5}{16}$$

Πρόβλημα 3:

Από σημείο P εκτός κύκλου φέρουμε τις εφαπτόμενες PA, PB και τυχαία τέμνουσα $P\Gamma\Delta$ προς τον κύκλο. Αν ισχύει $2E_{PA\Gamma} = 3E_{PB\Gamma}$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{E_{B\Delta\Gamma}}{E_{A\Delta\Gamma}}$.

Προτεινόμενη λύση :

Από την ομοιότητα των τριγώνων $PA\Delta, PA\Gamma$ έχουμε :

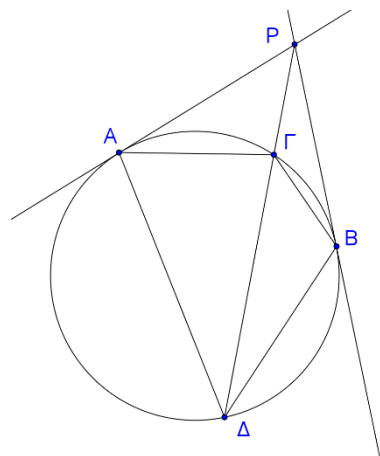
$$\frac{E_{PA\Delta}}{E_{PA\Gamma}} = \left(\frac{PA}{P\Gamma} \right)^2 \quad (1)$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων $PB\Delta, PB\Gamma$ έχουμε :

$$\frac{E_{PB\Delta}}{E_{PB\Gamma}} = \left(\frac{PB}{P\Gamma} \right)^2 \quad (2)$$

Επειδή $PA = PB$, ως εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο P , από τις (1) και (2) έχουμε :

$$\frac{E_{PA\Delta}}{E_{PA\Gamma}} = \frac{E_{PB\Delta}}{E_{PB\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{E_{PA\Delta} - E_{PA\Gamma}}{E_{PA\Gamma}} = \frac{E_{PB\Delta} - E_{PB\Gamma}}{E_{PB\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{E_{A\Delta\Gamma}}{E_{PA\Gamma}} = \frac{E_{B\Delta\Gamma}}{E_{PB\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{E_{B\Delta\Gamma}}{E_{A\Delta\Gamma}} = \frac{E_{PB\Gamma}}{E_{PA\Gamma}} = \frac{2}{3}$$



Πρόβλημα 4:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(12) = 21$ και $f(21) = 12$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε : $x_0 \cdot f'(x_0) \geq -f(x_0)$.

Προτεινόμενη λύση :

Υποθέτουμε ότι :

$$x \cdot f'(x) < -f(x) \quad (1)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x .

Η (1) γράφεται ισοδύναμα :

$$x \cdot f'(x) + f(x) < 0 \Leftrightarrow [x \cdot f(x)]' < 0 \quad (2)$$

Ορίζουμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x \cdot f(x)$. Σύμφωνα με την (2), η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ισοδύναμα έχουμε :

$$g(12) > g(21) \Leftrightarrow 12 \cdot f(12) > 21 \cdot f(21) \Leftrightarrow 12 \cdot 21 > 21 \cdot 12 \Leftrightarrow 0 > 0 ,$$

που είναι άτοπο.