



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/13

Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η σχέση: $e^{f(x)} = 2x^2 - 8x + 9$
 - α) Να δείξετε ότι: $f'(x) = 4(x - 2)e^{-f(x)}$
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση:

α) Έχουμε:

$$e^{f(x)} = 2x^2 - 8x + 9 \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = 4x - 8 \Rightarrow f'(x) = 4(x - 2)e^{-f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

β) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, αφού $e^{-f(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	—	0	+
f	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

Άρα: f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο για $x = 2$, το $(2, 0)$.

2. Με την βοήθεια του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής να αποδείξετε ότι:

$$|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\beta - \alpha|$$

Λύση:

Ορίζουμε συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{\sin \beta - \sin a}{\beta - a}$$

Όμως:

$$f'(\xi) = -\eta \mu \xi \text{ με } |-\eta \mu \xi| \leq 1, \forall \xi \in (a, \beta)$$

Άρα:

$$\left| \frac{\sin \beta - \sin a}{\beta - a} \right| \leq 1 \Rightarrow |\sin \beta - \sin a| = |\sin a - \sin \beta| \leq |\beta - a|$$

3. Έστω α και m δύο φυσικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 + (\alpha + 1)^2 = m^4 + (m + 1)^4$$

Λύση:

Έστω ότι η πιο πάνω σχέση ισχύει. Τότε ισοδύναμα έχουμε:

$$2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 2m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 2$$

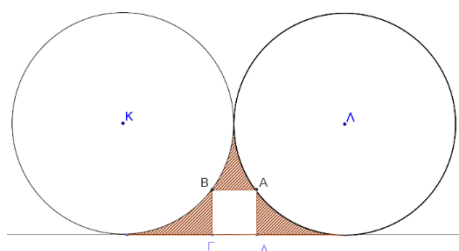
$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \alpha + 1) = 2(m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = (m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1) \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = (m^2 + m + 1)^2$$

Το Β' μέλος είναι τετράγωνος αριθμός. Το Α' μέλος δεν μπορεί να είναι τετράγωνος αφού η διακρίνουσα $\Delta = -3$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Με την υπόθεση που είχαμε κάνει στην αρχή καταλήγουμε σε άτοπο.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής αν γνωρίζετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές του Α και Β στους εφαπτόμενους κύκλους (Λ, 5) και (Κ, 5) αντίστοιχα και ΓΔ η κοινή εφαπτομένη τους.



Λύση:

Το ΚΛΖΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $E = 50$ τ.μ.

Έστω $AB = t$. Έχουμε:

$$KB = 5, KH = 5 - \frac{t}{2}, BH = 5 - t$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΗ έχουμε:

$$(KB)^2 = (KH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow 25 = \left(5 - \frac{t}{2}\right)^2 + (5 - t)^2 \Rightarrow t^2 - 12t + 20 = 0$$

$$(t - 10)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 2, \text{ αφού } t < 10.$$

Για το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε: $E = t^2 = 4$ τ.μ.

Για τους ίσους κυκλικούς τομείς ΚΘΕ και ΛΘΖ έχουμε: $E = \frac{25\pi}{4}$ τ.μ.

Τελικά:

$$E_{\gamma\rho.} = 50 - 4 - 2 \cdot \frac{25\pi}{4} = \left(46 - \frac{25\pi}{2}\right) \text{ τ.μ.}$$

