



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 6/12/14

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Δίνεται το σύνολο n διαδοχικών φυσικών αριθμών $K = \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\}$. Αν, διαγράφοντας δύο διαδοχικούς αριθμούς του συνόλου K , ο μέσος όρος των υπόλοιπων αριθμών του συνόλου είναι $\frac{105}{4}$, τότε

- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του n
(β) Να βρείτε τους αριθμούς που διαγράψαμε.

Προτεινόμενη λύση:

- (α) Έστω ότι οι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που διαγράφουμε είναι οι α και $\alpha + 1$. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - (2\alpha + 1)}{n - 2} = \frac{105}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 8\alpha - 4 = 105n - 210 \Leftrightarrow 2n^2 - 103n - 8\alpha + 206 = 0.$$

Αφού οι n, α είναι φυσικοί αριθμοί, από την πιο πάνω εξίσωση προκύπτει ότι το n πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Έστω λοιπόν ότι $n = 2\rho, \rho \in \mathbb{N}$.

$$2n^2 - 103n - 8\alpha + 206 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4\rho^2 - 206\rho - 8\alpha + 206 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\rho^2 - 103\rho - 4\alpha + 103 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = 4\rho^2 - 103(\rho - 1).$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι το $(\rho - 1)$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4. Έτσι, $\rho - 1 = 4t, t \in \mathbb{N}$ και αφού $n = 2\rho$, έχουμε:

$$4\alpha = 4\rho^2 - 103(\rho - 1) \Leftrightarrow 4\alpha = 4(1 + 4t)^2 - 103 \cdot 4t \Leftrightarrow \alpha = 16t^2 - 95t + 1.$$

Τα $\alpha, \alpha + 1 \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\}$. Τότε ισχύει :

$$1 \leq \alpha < n \Leftrightarrow 1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < n \Leftrightarrow 1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < 8t + 2.$$

Λύνοντας τις ανισώσεις $1 \leq 16t^2 - 95t + 1 < 8t + 2$

$$\Rightarrow t = 6 \text{ (Μοναδική λύση) και } v = 2\rho = (8t + 2) = 50.$$

(β) Αντικαθιστώντας $v = 50$ στην εξίσωση $2v^2 - 103v - 8\alpha + 206 = 0$ θα έχουμε
 $2(50)^2 - 103 \cdot 50 - 8\alpha + 206 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha = 56 \Leftrightarrow \alpha = 7$

Επομένως οι αριθμοί που διαγράφουμε είναι 7 και 8.

Πρόβλημα 2: Να βρείτε όλους τους ακέραιους v τέτοιους ώστε η εξίσωση

$$x^2 - (v + 1)x - 220 - \frac{57v}{4} = 0$$

να έχει ρητές ρίζες.

Προτεινόμενη λύση:

Για να έχει η δεδομένη εξίσωση ρητές ρίζες θα πρέπει η διακρίνουσα της

$$\Delta = (v + 1)^2 - 4 \left(-220 - \frac{57v}{4} \right) = v^2 + 59v + 881$$

να είναι τέλειο τετράγωνο. Αν η παράσταση $v^2 + 59v + 881$ είναι τέλειο τετράγωνο θα είναι τέλειο τετράγωνο και η παράσταση

$$4(v^2 + 59v + 881) = 4v^2 + 4 \cdot 59v + 3524$$

Δηλαδή για $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= 4v^2 + 4 \cdot 59v + 3524 = (2v)^2 + 2 \cdot (2v) \cdot 59 + 59^2 - 59^2 + 3524 \\ &= (2v + 59)^2 + 43 \Leftrightarrow (\kappa - 2v - 59)(\kappa - 2v + 59) = 43. \end{aligned}$$

Αφού οι κ, v είναι ακέραιοι αριθμοί και ο αριθμός 43 είναι πρώτος αριθμός έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\begin{cases} \kappa - 2v - 59 = 1 \\ \kappa - 2v + 59 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 22, \quad v = -19$
- $\begin{cases} \kappa - 2v - 59 = -1 \\ \kappa - 2v + 59 = -43 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = -22, \quad v = -40$
- $\begin{cases} \kappa - 2v - 59 = 43 \\ \kappa - 2v + 59 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = 22, \quad v = -40$
- $\begin{cases} \kappa - 2v - 59 = -43 \\ \kappa - 2v + 59 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa = -22, \quad v = -19$

Για $v = -19$ και $v = -40$ έχουμε $v^2 + 59v + 881 = 11^2$. Άρα η εξίσωση

$$x^2 - (v + 1)x - 220 - \frac{57v}{4} = 0$$

έχει ρητές ρίζες για τις τιμές $v = -19$ και $v = -40$.

Πρόβλημα 3: (α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi)$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της.

(β) Αν A, B, Γ είναι γωνίες τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι

$$\left(\sin \frac{A}{2} - \eta\mu \frac{A}{2}\right) + \left(\sin \frac{B}{2} - \eta\mu \frac{B}{2}\right) + \left(\sin \frac{\Gamma}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2}\right) > 0$$

Προτεινόμενη λύση:

(α) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση f έχουμε

$$f'(x) = -\eta\mu x$$

Η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$, έχει μοναδική λύση στο $[0, 2\pi)$ το $x = \pi$. Άρα

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \text{ και } f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi)$$

και αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi)$ έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι

- Γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi)$.

(β) Επειδή A, B, Γ είναι γωνίες τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ έχουμε

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως παίρνουμε

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$$

και από την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ θα έχουμε

$$\sin \frac{A}{2} > \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \eta\mu \frac{B}{2} \quad (1).$$

Όμοια παίρνουμε

$$\sin \frac{B}{2} > \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \quad (2) \quad \text{και} \quad \sin \frac{\Gamma}{2} > \eta\mu \frac{A}{2} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{\Gamma}{2} &> \eta\mu \frac{B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} + \eta\mu \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \eta\mu \frac{A}{2}\right) + \left(\sin \frac{B}{2} - \eta\mu \frac{B}{2}\right) + \left(\sin \frac{\Gamma}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4: Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O, ρ) . Οι διχοτόμοι (δ_1) και (δ_2) των γωνιών $\angle A$ και $\angle \Gamma$ του τριγώνου τέμνουν τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Έστω I το σημείο τομής των (δ_1) και (δ_2) . Από το σημείο I φέρουμε παράλληλη ευθεία (ε) προς την $A\Gamma$ η οποία τέμνει την ευθεία ΔE στο σημείο P . Να αποδείξετε ότι : (α) Τα τρίγωνα $\triangle DIE$ και $\triangle DBE$ είναι ίσα
(β) η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PBA$.

Προτεινόμενη λύση:

(α) η γωνία $\angle BID$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle ABI$ είναι

$$\angle BID = \angle \frac{A}{2} + \angle \frac{B}{2}$$

Επίσης

$$\angle IBD = \angle IB\Gamma + \angle \Gamma BD = \angle \frac{B}{2} + \angle \Gamma BD$$

Όμως, η γωνία $\angle \Gamma BD$ είναι εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο, άρα $\angle \Gamma BD = \angle \Gamma AD = \angle \frac{A}{2}$.

Επομένως

$$\angle IBD = \angle \frac{B}{2} + \angle \frac{A}{2}$$

Δηλαδή, $\angle BID = \angle IBD$. Άρα το τρίγωνο $\triangle DBI$ είναι ισοσκελές.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι

$$\angle EIB = \angle EBI = \angle \frac{B}{2} + \angle \frac{\Gamma}{2}$$

και άρα το τρίγωνο $\triangle EBI$ είναι ισοσκελές.

Από τα προηγούμενα ισοσκελή τρίγωνα συμπεραίνουμε ότι: $EI = EB$, $DI = DB$ και $\angle EID = \angle EBD$. Άρα τα τρίγωνα $\triangle DIE$ και $\triangle DBE$ είναι ίσα.

(β) Από τα παραπάνω έχουμε ότι σημεία B και I είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΔP , και επομένως η ΔP είναι μεσοκάθετη του BI . Λόγω συμμετρίας έχουμε ότι:

$$\angle EBP = \angle EIP.$$

Αν η παράλληλη (ε) προς την $A\Gamma$, τέμνει τον κύκλο στο σημείο T θα έχουμε

$$\angle EIP = \angle GIT$$

και λόγω της παραλληλίας

$$\angle GIT = \angle AGI = \angle IGB$$

Επομένως

$$\angle EBP = \angle IGB$$

και αφού

$$\angle EBA = \angle EGA = \angle IGB$$

παίρνουμε ότι $\angle EBP = \angle EBA$, δηλαδή η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle PBA$.

