



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2014

Ώρα Εξέτασης: 10:00 -12:00

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = 2\sqrt{x+3}$ με $x > -3$ και $0 < \alpha < \beta$ και ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι

A) $\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\xi+3}} = \sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3}$

B) $\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha+3}} > \sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3} > \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta+3}}$

Λύση

$\varphi(x) = 2\sqrt{x+3}$ έτσι $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

A) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα :

$$\begin{aligned}\varphi'(\xi) &= \frac{2\sqrt{\beta+3} - 2\sqrt{\alpha+3}}{\beta - \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\xi+3}} &= \frac{2(\sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3})}{\beta - \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\xi+3}} &= \sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3} (*)\end{aligned}$$

B) $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ έτσι για $x > -3$ ισχύει ότι $\varphi(x)$ αύξουσα

Η $\varphi(x)$ είναι αύξουσα άρα για $\xi \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $\varphi(\alpha) < \varphi(\xi) < \varphi(\beta)$

$$\begin{aligned}2\sqrt{\alpha+3} &< 2\sqrt{\xi+3} < 2\sqrt{\beta+3} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta+3}} &< \frac{1}{\sqrt{\xi+3}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}} \\ \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta+3}} &< \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\xi+3}} < \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha+3}}\end{aligned}$$

$$\text{Από } (*) \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta+3}} < \sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3} < \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha+3}}$$

$$\text{Άρα } \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha+3}} > \sqrt{\beta+3} - \sqrt{\alpha+3} > \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta+3}}$$

Θέμα 2

Έστω $g(x) = \frac{P(x)}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$, και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{9}{4}$. Να βρεθεί η $P(x)$.

Λύση

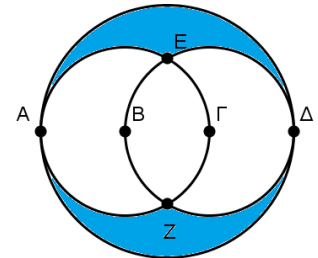
$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5 \Rightarrow$ Το $P(x)$ είναι πολυώνυμο β' βαθμού με συντελεστή του x^2 το 5.

$L = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{P(x)}{(x-2)(x+2)}$. Αφού το όριο υπάρχει και ισούται με $\frac{9}{4}$ σημαίνει η μια ρίζα του $P(x)$ είναι το 2, ώστε να γίνεται απλοποίηση και να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow P(x) = 5(x-2)(x-x_2) \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-2)(x-x_2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-x_2)}{(x+2)} = \frac{9}{4} \\ \Rightarrow \frac{5(2-x_2)}{(2+2)} &= \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{10-5x_2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow 10-5x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow P(x) = 5(x-2) \left(x - \frac{1}{5} \right) = 5x^2 - 11x + 2 \end{aligned}$$

Θέμα 3

Στο διπλανό σχήμα δύο μικροί κύκλοι τέμνονται μεταξύ τους και εφάπτονται ενός μεγαλύτερου κύκλου. Τα σημεία A, B, Γ, Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = 1$.
Να υπολογίσετε το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

Έστω E_1 : Το εμβαδό του Μεγάλου Κύκλου

E_2 : Το εμβαδό ενός από τους Μικρούς Κύκλου

E_3 : Το εμβαδό της Τομής των μικρών Κύκλων.

Τότε το ζητούμενο εμβαδό (E_{ZHT}) υπολογίζεται από τη σχέση

$$E_{ZHT} = E_1 - 2E_2 + E_3.$$

Για τον υπολογισμό του E_3 εργαζόμαστε ως εξής:

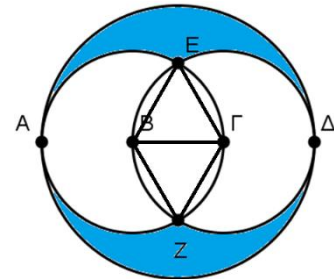
Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma E, B\Gamma$.

Ισχύει ότι $EB = BZ = Z\Gamma = \Gamma E = B\Gamma = 1 \text{ cm}$

Άρα τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $B\Gamma Z$ είναι ισόπλευρα που σημαίνει το E_3 αποτελείται από δύο κυκλικά τμήματα κύκλων ακτίνας 1 cm και γωνίας 120° .

$$E_3 = 2 \left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \eta\mu(120) \right) = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{ZHT} = E_1 - 2E_2 + E_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2$$



Θέμα 4

Μια υπολογιστική μηχανή υπολογίζει (προσεγγιστικά) τις δυνάμεις του αριθμού e (δηλαδή τις τιμές του e^x για διάφορες τιμές του x) χρησιμοποιώντας το άθροισμα $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ η προσέγγιση της υπολογιστικής μηχανής είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του e^x .

(β) Για ποιες θετικές τιμές του x είναι καλή η προσέγγιση της υπολογιστικής μηχανής (έχει μικρότερο σφάλμα); Για τις τιμές κοντά στο 0 ή για πιο μεγάλες τιμές; Να αιτιολογήσετε επαρκώς την απάντησή σας.

Λύση

(α)

Ορίζεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ που μας δίνει το σφάλμα του υπολογισμού της υπολογιστικής μηχανής.

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

$$f''(x) = e^x - 1$$

$$f'''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Επομένως η $f''(x)$ είναι αύξουσα, άρα

$$f''(x) > f''(0) = e^0 - 1 = 0, \quad \forall x > 0$$

Επομένως η $f'(x)$ είναι αύξουσα, άρα

$$f'(x) > f'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0, \quad \forall x > 0$$

Επομένως η $f(x)$ είναι αύξουσα, άρα

$$f(x) > f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0, \quad \forall x > 0$$

Συνεπώς έχουμε $f(x) > 0$, $\forall x > 0$, άρα

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \forall x > 0$$

Επομένως η πραγματική τιμή του e^x είναι μεγαλύτερη από την προσέγγιση που δίνει η υπολογιστική μηχανή.

(β)

Η $f(x)$ μας δίνει το σφάλμα του αποτελέσματος της υπολογιστικής μηχανής. Αποδείξαμε ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση για $x > 0$. Επομένως όσο αυξάνονται οι τιμές του x , αυξάνονται κι οι τιμές της συνάρτησης, άρα ουσιαστικά αυξάνεται το σφάλμα της υπολογιστικής μηχανής. Επομένως μικρότερο σφάλμα έχουμε για τιμές του x κοντά στο 0.