



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/12/15

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Να βρείτε το άθροισμα όλων των θετικών ακεραίων αριθμών N , έτσι ώστε το N^2 να είναι πενταγήφιος αριθμός και το 54 να διαιρεί το N^2 .

Λύση: Θα έχουμε ότι $N^2 = 54\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$

Αναλύοντας το 54 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων θα έχουμε $N^2 = 2 \cdot 3^3 \kappa$

Για να είναι το δεύτερο μέρος τέλει τετράγωνο θα πρέπει να έχουμε $\kappa = 2 \cdot 3 \cdot \rho^2$, $\rho \in \mathbb{N}$.

Τότε $N^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot \rho^2$ ή $N = 2 \cdot 3^2 \cdot \rho$ ή $N = 18\rho$.

Αφού όμως το N^2 είναι πενταγήφιος αριθμός θα πάρουμε

$$10^4 < N^2 < 10^5 \text{ ή } 10^2 < N < 10^2 \sqrt{10}$$

Αντικαθιστώντας το $N = 18\rho$ θα έχουμε $10^2 < 18\rho < 10^2 \sqrt{10}$ ή $\frac{100}{18} < \rho < \frac{100}{18} \sqrt{10}$

Επειδή $\rho \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $6 \leq \rho \leq 17$

Επομένως το ρ παίρνει τιμές $\rho = 6, 7, 8, \dots, 17$ και άρα

$$N = 18\rho \Rightarrow N = 18 \cdot 6, 18 \cdot 7, \dots, 18 \cdot 17$$

Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν Αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 18 \cdot 6 = 108$ και

διαφορά $\delta = 18$. Άρα $\Sigma = 18(6 + 7 + \dots + 17) = 18 \cdot \frac{6+17}{2} \cdot 12 = 2484$.

Πρόβλημα 2: Αν $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι $\eta\mu^{2\nu+2} x + \sigma\upsilon\nu^{2\nu+2} x = \frac{1}{2^\nu}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Λύση: $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 2x = 1$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu^2 2x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = 0$.

$$\begin{aligned} \eta\mu^{2\nu+2} x + \sigma\upsilon\nu^{2\nu+2} x &= (\eta\mu^2 x)^{\nu+1} + (\sigma\upsilon\nu^2 x)^{\nu+1} \\ &= \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\nu+1} + \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\nu+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1} \\ &= \frac{1}{2^\nu} . \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3: Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (C_1) και (C_2) με κέντρα K και O αντίστοιχα οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε κάθετη στην ευθεία AB η οποία τέμνει τον κύκλο (C_2) ξανά στο σημείο E . Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο P του AE και ακτίνα PA φέρουμε κύκλο (C) που τέμνει τους κύκλους (C_1) και (C_2) στα σημεία T και Z αντίστοιχα. Αν η ευθεία TZ τέμνει τον (C_2) στο σημείο N και τον (C_1) στο σημείο Θ , να αποδείξετε:

α) Το τετράπλευρο $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\Theta N = TZ$

γ) Τα σημεία P, E, Z, O είναι ομοκυκλικά.

Λύση:

Κατ' αρχήν η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου (C) στο A και έτσι $\angle PAB = \angle EAB = 90^\circ$ και συνεπώς η EB είναι διάμετρος του κύκλου (C_2) . Επίσης, επειδή οι κύκλοι (C_1) και (C_2) είναι ίσοι, τα τόξα $\widehat{ATB}$ και $\widehat{ANB}$ είναι ίσα και συνεπώς $\angle A\Theta B = \angle AZB$ (σχήμα).

α) $\angle B\Theta Z = \angle B\Theta T = \angle TAB = \angle AZT = \angle AZ\Theta$, άρα $B\Theta \parallel ZA$: (1).

$\angle A\Theta B = \angle AZB$ και αφού $\angle B\Theta Z = \angle AZ\Theta$, με αφαίρεση παίρνουμε $\angle A\Theta Z = \angle \Theta ZB$, απ' όπου $A\Theta \parallel BZ$: (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα

$$I\Theta = IZ : (3).$$

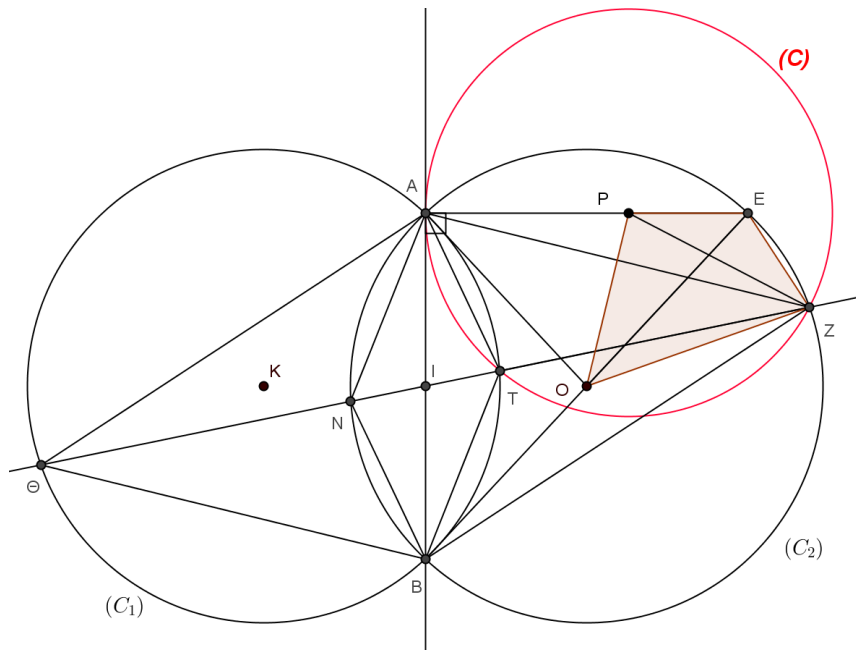
Το $AZB\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο είναι παραλληλόγραμμο, διότι: $\angle ABN = \angle AZN = \angle AZT = \angle BAT$, άρα $BN \parallel AT$ και $\angle BAN = \angle NZB = \angle \Theta ZB = \angle A\Theta Z = \angle A\Theta T = \angle ABT$, άρα $AN \parallel BT$. Συνεπώς οι διαγώνιοι του $AZB\Theta$ διχοτομούνται, απ' όπου

$$IN = IT : (4).$$

Από τις (3), (4) έχουμε $I\Theta - IN = IZ - IT \Rightarrow \boxed{\Theta N = TZ}$.

γ) EB είναι διάμετρος του κύκλου (C_2) και

$\angle EOZ = 2\angle EBZ = 2\angle EAZ = 2\angle PAZ = \angle PAZ + \angle PZA = \angle EPZ$, αφού το τρίγωνο ΔAPZ είναι ισοσκελές και $\angle EPZ$ εξωτερική του γωνία. Άρα $\angle EOZ = \angle EPZ$, συνεπώς το τετράπλευρο $PEZO$ είναι εγγράφημο, δηλαδή τα σημεία P, E, Z, O είναι ομοκυκλικά.



Πρόβλημα 4: Να βρείτε τον επόμενο, καθώς και τον μεγαλύτερο όρο της ακολουθίας

$$\frac{1}{503}, \frac{4}{524}, \frac{9}{581}, \frac{16}{692}, \dots$$

δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Λύση: Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές των κλασμάτων $1, 4, 9, 16, \dots$ γράφονται $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ δηλαδή αποτελούν ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = n^2$.

Επίσης οι παρονομαστές των κλασμάτων της ακολουθίας $503, 524, 581, 692, \dots$ γράφονται $500 + 3 \cdot 1^3, 500 + 3 \cdot 2^3, 500 + 3 \cdot 3^3, 500 + 3 \cdot 4^3, \dots$ δηλαδή αποτελούν ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = 500 + 3n^3$. Επομένως ο γενικός όρος της δεδομένης ακολουθίας είναι

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n^2}{500 + 3n^3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Αρα ο επόμενος των δεδομένων όρων της ακολουθίας θα είναι

$$\frac{5^2}{500 + 3 \cdot 5^3} = \frac{25}{875} = \frac{1}{35}.$$

Για να προσδιορίσουμε τον μέγιστο όρο θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{500 + 3x^3}, \quad x > 0$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση έχουμε

$$f'(x) = \frac{2x(500 + 3x^3) - x^2(9x^2)}{(500 + 3x^3)^2} = \frac{x(1000 - 3x^3)}{(500 + 3x^3)^2}$$

Πιθανά ακρότατα θα έχουμε για $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(1000 - 3x^3) = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt[3]{3}} \notin \mathbb{N}$.

Επειδή $f'(x) < 0$ για $x > \frac{10}{\sqrt[3]{3}}$ και $f'(x) > 0$ για $x < \frac{10}{\sqrt[3]{3}}$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{10}{\sqrt[3]{3}}\right)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\frac{10}{\sqrt[3]{3}}, +\infty\right)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x = \frac{10}{\sqrt[3]{3}}$, θα έχουμε ολικό μέγιστο για την f στο $x = \frac{10}{\sqrt[3]{3}}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$6 < \frac{10}{\sqrt[3]{3}} < 7 \text{ και ότι } f(6) < f(7)$$

Επομένως ο μεγαλύτερος όρος της ακολουθίας είναι ο

$$\gamma_7 = \frac{49}{1529}$$